Tarea 7 de Variable Compleja.

Fecha de entrega:

Grupo A 3 de Mayo del 2017, Grupo B 4 de Mayo 2017.

Resuelva los siguientes problemas.

1.- Hallar el residuo en $z = 0$ de la función

$$a)\frac{1}{z+z^2}, \qquad b) z\cos\left(\frac{1}{z}\right), \qquad c)\frac{\sinh z}{z^4(1-z^2)}$$

2.- Usar el teorema de cauchy para evaluar las integrales sobre la circunferencia $|z| = 3$, recorrida en el sentido de las manecillas del reloj.

$$a)\frac{e^{-z}}{z^2}, \qquad b) z^2 e^{1/z}, \qquad c)\frac{z+1}{z^2-2z}$$

3.- Usando el teorema de reducción a un único residuo calcular las integrales sobre la circunferencia $|z| = 2$

$$\frac{z^5}{1-z^3}, \qquad \frac{1}{1+z^2}, \qquad c)\frac{1}{z}$$

4.- Sea C la circunferencia $|z| = 1$, recorrida en sentido positivo. Seguir los pasos indicados para probar que

$$\int_C \text{Exp}\left(z + \frac{1}{z}\right) dz = 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!}$$

a) Usando la serie de Maclaurin de e^z, escribir la integral interior como

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_C z^n Exp\left(\frac{1}{z}\right) dz$$

b) Evaluar la integral para llegar al resultado deseado.

5.- En cada caso encontrar la parte principal y clasifique la singularidad

$$a)\frac{z^2}{1+z}, \qquad b)\frac{\sin(z)}{z}, \qquad c)\frac{1}{(2-z)^3}$$

6.- Probar que cada punto singular de las funciones es un polo de orden m y encontrar el residuo

$$a)\frac{1-\cosh(z)}{z^3}, \qquad \frac{1-e^{2z}}{z^4}, \qquad c)\frac{e^{2z}}{(z-1)^2}$$

7.- Escribir la función

$$f(z) = \frac{8a^3z^2}{(z^2+a^2)^3}, \qquad (a > 0)$$

como

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-ai)^3} \quad \text{donde} \quad \phi(z) = \frac{8a^3z^2}{(z+ai)^3}$$

Argumentar por que $\phi(z)$ admite un desarrollo en serie de Taylor centrado en $z = ai$. A continuación usarlo, para probar que la parte principal de f en ese punto viene dada por

$$-\frac{i/2}{(z-ai)} - \frac{a/2}{(z-ai)^2} - \frac{a^2 i}{(z-ai)^3}$$