Tarea 6 de Variable Compleja.

Fecha de entrega:

Grupo A 7 de Abril del 2017, Grupo B 7 de Abril 2017.

Resuelva los siguientes problemas.

1.- Desarrollar la función $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$

a) En serie de Maclaurin, indicando donde es válido el desarrollo.

b) En serie de Laurent en el dominio $1 < |z| < 8$.

2.- Demostrar que cuando $0 < |z-1| < 2$,

$$\frac{z}{(z-1)(z-3)} = -3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{2^{n+2}} - \frac{1}{2(z-1)}$$

3.- Hacer $z = re^{i\theta}$ en $\frac{a}{z-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^n}$ para mostrar

$$a)\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos n\theta = \frac{a\cos\theta - a^2}{1 - 2a\cos\theta + a^2}, \quad b)\sum_{n=0}^{\infty} a^n \sin n\theta = \frac{a\sin\theta - a^2}{1 - 2a\cos\theta + a^2}$$

donde $-1 < |a| < 1$.

4.- a) Sean z un número complejo cualquiera y C la circunferencia unidad $w = e^{i\theta}$ con $-\pi \leq \theta \leq \pi$ en el plano w. Usar esa curva para calcular los coeficientes c_n de la serie de Laurent, adaptada para series entorno al origen del plano w, para demostrar

$$\text{Exp}\left[\frac{z}{2}\left(w - \frac{1}{w}\right)\right] = \sum_{-\infty}^{\infty} j_n(z) w^n \qquad (0 < |w| < \infty)$$

donde

$$j_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n\phi - z\sin\phi)} d\phi \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

b) Probar que los coeficientes del inciso a) pueden escribirse como

$$j_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos(n\phi - z\sin\phi) d\phi \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

5.- Sea $f(z)$ analítica en un anillo centrado en el origen que contiene la circunferencia unidad $z = e^{i\theta}$ con $-\pi \leq \theta \leq \pi$ usando este camino en los coeficientes de una serie de Laurent, mostrar que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\phi}) d\phi + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\phi})\left[\left(\frac{z}{e^{i\phi}}\right)^n + \left(\frac{e^{i\phi}}{z}\right)^n\right] d\phi$$

cuando z es un punto de ese dominio anular.

b) Escribir $u(\theta) = Re[f(e^{i\phi})]$ y mostrar que del resulatdo en a) podemos obtener

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(\phi) d\phi + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} u(\phi)\cos[n(\theta - \phi)] d\phi$$

6.- Probar que si $f(z)$ es anlítica en z_0 y $f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(m)}(z_0) = 0$, entonces la función

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}} & \text{si } z \neq z_0 \\ \frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!} & \text{si } z = z_0 \end{cases}$$

en analítica.

7.- Supongamos que una función $f(z)$ admite un desarrollo en serie de potencias

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

en el interior de la circunferencia $|z - z_0| = R$. Utilizar el hecho de que las series se pueden derivar término a término e inducción matemática para demostrar qye

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{k!} a_{n+k} (z - z_0)^k \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

cuando $|z - z_0| < R$. Entonces, haciendo $z = z_0$ probar que los coeficientes a_n $(n = 0, 1, 2 \ldots)$ son los coeficientes de la serie taylor de f centrada en z_0.

8.- Demostrar que la función

$$f_2(z) = \frac{1}{z^2 + 1} \qquad (z \neq \pm i)$$

es la prolongación analítica de la función

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \qquad (|z| < 1)$$

al dominio formado por todos los puntos del plano z excepto $z = \pm i$.

9.- Escribir

$$\frac{1}{1 + z^2/3! + z^4/5! + \ldots} = d_0 + d_1 z + d_2 z^2 + d_3 z^3 + d_4 z^4 + \ldots$$

donde los coeficientes en la serie de potencias de la derecha han de ser calculados multiplicando las dos series en la ecuación

$$1 = \left(1 + \frac{1}{3!} z^2 + \frac{1}{5!} z^4 + \ldots\right)(d_0 + d_1 z + d_2 z^2 + d_3 z^3 + d_4 z^4 + \ldots)$$

Efectuar la multiplicación para mostrar que

$$(d_0 - 1) + d_1 z + \left(d_2 + \frac{1}{3!} d_0\right) z^2 + \left(d_3 + \frac{1}{3!} d_1\right) z^3 + \left(d_4 + \frac{1}{3!} d_2 + \frac{1}{5!} d_0\right) z^4 + \ldots = 0.$$

cuando $|z| < \pi$.

10.- Los números de Euler son los números E_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ que aparecen en el desarrollo de Mclaurin

$$\frac{1}{\cosh z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{n!} z^n \qquad (|z| < \pi/2)$$

Argumentar por que este desarrollo es válido en el disco indicado y por que $E_{2n+1} = 0$.

Finalmente verificar que $E_0 = 1,\ E_2 = -1,\ E_4 = 5$ y $E_6 = -61$.