Tarea 5 de Variable Compleja.

Fecha de entrega:

Grupo A 20 de Marzo del 2017, Grupo B 21 de Marzo 2017.

Resuelva los siguientes problemas.

1.- Seguir el proceso indicado para deducir la fórmula de integración

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2bx\ dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}, \qquad (b>0)$$

a) Probar que la suma de las integrales de e^{-z^2} sobre los lados horizontales del rectángulo con vértices $(a,0),(a,b),(-a,b)$ y $(-a,0)$ se puede escribir como

$$2\int_0^a e^{-x^2}\ dx - 2e^{b^2}\int_0^a e^{-x^2}\cos 2bx\ dx$$

y a su vez, la suma de las integrales sobre los dos lados verticales como

$$ie^{-a^2}\int_0^b e^{y^2}e^{-i2ay}\ dy - ie^{-a^2}\int_0^b e^{y^2}e^{i2ay}\ dy$$

Así pues apelando al teorema de Cauchy-Goursat, demostrar que

$$\int_0^a e^{-x^2}\cos 2bx\ dx = e^{-b^2}\int_0^a e^{-x^2}\ dx + e^{-(a^2+b^2)}\int_0^b e^{y^2}\sin 2ay\ dy$$

b) Aceptando que $\int_0^\infty e^{-x^2}\ dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ y observando que

$$\left|\int_0^b e^{y^2}\sin 2ay\ dy\right| < \int_0^b e^{y^2}\ dy$$

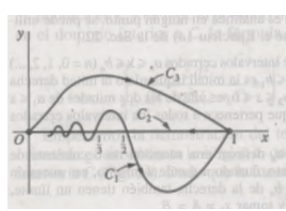
Obtener la fórrmula buscada haciendo tender a hacia infinito en la ecuación final del apartado a).

2.- El camino $\mathcal{C}_1$ que va del origen al punto $z=1$ a lo largo de la gráfica de la función

$$y(x) = \begin{cases} x^3\sin\frac{\pi}{x} & \text{si } 0<x\leq 1; \\ 0 & \text{si } x=0, \end{cases}$$

es un arco suave que corta al eje real infinitas veces. Sea $\mathcal{C}_2$ el segmento recto del eje real que vuelve desde $z=1$ hasta el origen. Y sea $\mathcal{C}_3$ cualquier arco suave del origen a $z=1$ sin autointersecciones y que tenga en común con $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ solamente los puntos inicial y final (figura). Aplicar el teorema de Cauchy-Goursat para demostrar que si una función f es entera,

$$\int_{\mathcal{C}_1} f(z)dz = \int_{\mathcal{C}_3} f(z)dz \qquad \text{y} \qquad \int_{\mathcal{C}_2} f(z)dz = -\int_{\mathcal{C}_3} f(z)dz$$



3.- Demostrar que si $\mathcal{C}$ es un camino cerrado simple orientado positivamente, el área de la región acotada por $\mathcal{C}$ viene dada por

$$\frac{1}{2i}\int_{\mathcal{C}} \bar{z}dz$$

4.- Sea C la circunferencia $|z| = 3$, recorrida en sentido positivo, probar que si

$$g(w) = \int_C \frac{2z^2 - z - 2}{z - w} dz \quad (|w| \neq 3),$$

entonces $g(2) = 8\pi i$. Cuál es el valor de $g(w)$ cuando $(|w| > 3)$?.

5.- Probar que si f es anaítica en el interior y en los puntos de un camino cerrado simple C, y z_o no pertenece a C, entonces

$$\int_C \frac{f'(z)dz}{z - z_0} = \int_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^2}.$$

6.- Sea f una función continua en los puntos de un camino cerrado simple C. Siguiendo el procedimiento de esta sección, demotrar que la función

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)ds}{s - z},$$

es analítica en todo punto z interior a C y que

$$g'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)ds}{(s - z)^2}.$$

7.- Sea C la circunferencia unidad $z = re^{i\theta}, (-\pi \leq \theta \leq \pi)$. En primer lugar, probar que para toda constante real a,

$$\int_C \frac{e^{az}}{z} dz = 2\pi i.$$

A continuación, expresar esta integral en términos de θ para deducir la fórmula de integración

$$\int_0^\pi e^{a\cos\theta} \cos{(a \sin\theta)} d\theta = \pi.$$

8.- a) Con ayuda de la fórmula binominal, probar que la función

$$P_n(z) = \frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dz^n}(z^2 - 1)^n \quad (n = 0, 1, 2, 3, ...),$$

es para cada n un polinomio de grado n.

b)Sea $\mathcal{C}$ cualquier camino cerrado simple, orientado positivamente, en torno de un punto z. Usando la representación integral de la derivada n-ésima de una función analítica, demostrar que los polinomios del apartado a) se pueden expresar como

$$P_n(z) = \frac{1}{2^{n+1}\pi i}\int_{\mathcal{C}} \frac{(s^2 - 1)^n}{(s - z)^{n+1}} ds \quad (n = 0, 1, 2, 3, ...).$$

c) Explicar por qué el integrando de la representación para $P_n(z)$ en b) se puede escribir $(s + 1)^n/(s - 1)$ si $z = 1$. Seguidamente, aplicar la fórmula integral de Cauchy para probar que

$$P_n(1) = 1 \quad (n = 0, 1, 2, 3, ...),$$

Análogamente demostrar que

$$P_n(-1) = (-1)^n \quad (n = 0, 1, 2, 3, ...).$$