Tarea 4 de Variable Compleja.

Fecha de entrega:

Grupo A 13 de Marzo del 2017.

Grupo B 14 de Marzo 2017.

Resuelva los siguientes problemas.

1.- Uasar las reglas del cálculo para demostrar las siguientes reglas cuando $w(t) = u(t) + iv(t)$ es una función compleja de una variable real t y supuesto que $w'(t)$ existe:
$a)\frac{d}{dt}w(-t) = -w'(-t)$, donde $w'(t)$ denota la derivada de $w(t)$ respecto a t, y evaluada en $-t$
$b)\frac{d}{dt}[w(-t)]^2 = 2w(t)w'(t)$

2.- Probar que si m y n son enteros

$$\int_{-0}^{2\pi} e^{im\theta}e^{-in\theta}d\theta = 2\pi\delta_{mn}$$

donde $\delta_{mn} = 1$ si $m = n$ y 0 para $m \neq n$.

3.- Demostrar que para todo x en intervalo $-1 \leq x \leq 1$ las funciones

$$P_n(x) - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x + i\sqrt{1-x^2}\cos\theta\right)^n \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

satisfacen la desigualdad $|P_n(x)| \leq 1$.

4.-Se $\mathcal{C}$ la mitad de la derecha de la circunferencia $|z| = 2$, recorrida en sentido positivo. Dos parametrizaciones admisibles para ella son

$$z = z(\theta) = 2e^{i\theta} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{ó} \quad z = Z(y) = \sqrt{4-y^2} + iy \quad (-2 \leq y \leq 2).$$

Verificar que $Z(y) = z(\phi(y))$, donde

$$\phi(y) = \arctan\frac{y}{\sqrt{4-y^2}} \qquad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \arctan t \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

Probar además que esta función ϕ tiene derivada positiva.

5.- Sea $f(z)$ una función analítica en un punto z_0 del arco suave $z = z(t)$ $(a \leq t \leq b)$. Probar que si $w(t) = f[(z)]$ entonces $w'(t) = f'[t]z'(t)$, cuando $t = t_0$.

6.- Calcular $\int_C f(z)dz$
a) $f(z) = (z+2)/z$ y C es la semicircunferencia $z = 2e^{i\theta}$, $(0 \leq \theta \leq \pi)$.
b) $f(z) = (z+2)/z$ y C es la semicircunferencia $z = 2e^{i\theta}$, $(\pi \leq \theta \leq 2\pi)$.
c) $f(z) = (z+2)/z$ y C es la circunferencia $z = 2e^{i\theta}$, $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$.
d) $f(z) = z - 1$ y C es el arco de $z = 0$ a $z = 2$ que consta de la circunferencia $z = 1 + e^{i\theta}$, $(\pi \leq \theta \leq 2\pi)$.
e) $f(z) = z - 1$ y C es el segmento $0 \leq x \leq 2$ del eje real.
f) $f(z) = 1$ y C es un camino arbitrario desde un punto fujo z_1 hasta otro punto fijo z_2 del plano complejo.
g) $f(z)$ es la rama $z^{-1+i} = exp((-1+i)log(z)) \quad (|z| > 0, 0 < argz < 2\pi)$.

7.- Evaluar la Integral

$$\int_C z^m \bar{z}^n dz$$

donde m y n son enteros, y C es la circunferencia unidad $|z| = 1$, orientada en sentido positivo.

8.- Sea C_0 la circunferencia $|z - z_0| = R$ orientada positivamente. Usar para ella la paremetrizacin $z = z_0 + Re^{i\theta}$, $(-\pi \leq \theta \leq \pi)$ para demostrar las siguientes fórmulas de integración:

$$a) \int_{C_0} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i, \qquad \int_{C_0} (z - z_0)^{n-1} dz = 0 \quad (n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

9.- Sea C_0 la circunferencia $|z - z_0| = R$ orientada positivamente. Usar para ella la paremetrizacin $z = z_0 + Re^{i\theta}$, $(-\pi \leq \theta \leq \pi)$ para demostrar

$$\int_{C_0} (z - z_0)^{a-1} dz = i \frac{2R^a}{a} \sin(a\pi)$$

donde a es cualquier número real no nulo y donde han tomado la rama principal del integrando y valor principal de R^a.

10.- Sea C_1 y C_2 dos parametrizaciones diferentes para el camino α, demostrar que

$$\int_{C_1} f(z) dz = \pm \int_{C_2} f(z) dz$$

donde la diferencia de signo ocurre si cambia el sentido en que se recorre el camino.