Tarea 3 de Variable Compleja.

Fecha de entrega:

Grupo A 20 de Febrero del 2017.

Grupo B 21 de Febrero 2017.

Resuelva los siguientes problemas.

1.- Sea $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ analítica en un dominio D. Consideremos las familias de curvas nivel $u(x,y) = c_1$ y $v(x,y) = c_2$, donde c_1 y c_2 son constantes reales arbitrarias. Demostrar que estas familias son ortogonales, es decir, que si dos curvas $u(x,y) = c_1$ y $v(x,y) = c_2$ se cortan en un punto de D, y $f'(x) \neq 0$, entonces las rectas tangentes a esas dos curvas en (x_0, y_0) son perpendiculares.

2.- Usar las ecuaciones de Cauchy-Rieman para probar que $f(z) = e^{\bar{z}}$ no es analítica en ningún punto.

3.- Probar que $|e^{z^2}| \leq e^{|z|^2}$.

4.- Hallar todos los valores de z tales que
a) $e^z = -2$, b) $e^z = 1+\sqrt{3}i$, c) $e^{2z-1} = 1$

5.- Verificar que para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
a) $\log e = 1 + 2n\pi i$, b) $\log i = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi i$, c) $\log(-1+\sqrt{3}i) = \ln 2 + 2\left(2n + \frac{1}{3}\right)\pi i$

6) Probar que:
a) La función $\operatorname{Log}(z-i)$ es analítica en todas partes excepto en la semirecta $y = 1$ $(x \leq 0)$.
b) La función

$$\frac{\operatorname{Log}(z+4)}{z^2+i}$$

es analítica en todas partes salvo en los puntos $\pm(1-i)/\sqrt{2}$ y en la porción $x \leq -4$ del eje real.

7) Sea $z = re^{i\Theta}$ $(-\pi < \Theta < \pi)$ un número complejo no nulo, y sea n un entero positivo fijo. Demostrar que todos los valores de $\log(z^{1/n})$ vienen dados por

$$\log(z^{1/n}) = \frac{1}{n}\ln r + i\frac{\Theta + 2(pn+k)\pi}{n}$$

donde $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ y $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. A continuación, tras escribir

$$\frac{1}{n}\log(z) = \frac{1}{n}\ln r + i\frac{\Theta + 2q\pi}{n}$$

donde $q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ probar que el conjunto de valores de $\log(z^{1/n})$ es el mismo que el de valores de $(1/n)\log z$. Verificar así que $\log(z^{1/n}) = (1/n)\log z$, donde para cada valor de la izquierda hay que seleccionar un valor adecuado de la derecha y viceversa.

8) Demostrar que la fórmula de Euler sigue siendo válida si θ se sustituye por z.

9) Demostrar que:
a) $\overline{\cos iz} = \cos i\bar{z}$ para todo z, b) $\overline{\sin iz} = \sin i\bar{z}$ si y solo si $z = n\pi$ y $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$