Tarea 2 de Variable Compleja.

Fecha de entrega:

Grupo A 13 de Febrero del 2017.

Grupo B 14 de Febrero 2017.

Resuelva los siguientes problemas.

1.- Dibujar la región en la que se transforma el sector $r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq \pi/4$ bajo:
a) $w = z^2$, b)$w = z^3$, $c)w = z^4$.

2) Hallar la imagen de la semifranja infinita $x \geq 0, 0 \leq y \leq \pi$ bajo la transformación $w = e^z$, señalar las porciones correspondientes sobre los contornos.

3) Sean $a,\ b,\ c$ constantes complejas. Usar la definición de límite para probar

$$a)\ \lim_{z\to z_0}(az+b) = az_0 + b,\quad b)\ \lim_{z\to z_0}(z^2+c) = z_0^2 + c,\quad c)\ \lim_{z\to 1-i}[x+i(2x+y)] = 1+iz.$$

4) Demostrar que un polinomio $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n \quad (a_n \neq 0)$ de grado $n(n > 1)$ es derivable en todos los puntos del plano y su derivada es $P'(z) = a_1 + 2a_2 z + a_3 z^3 + \ldots + n a_n z^{n-1}$

5) Demuestre que las derivadas de las siguientes funciones no existe en ningún punto:
$a)\ f(z) = \bar{z}\quad b)\ f(z) = z - \bar{z}\quad c)\ f(z) = 2x + ixy^2\quad d)\ f(z) = x^x e^{-iy}$

6) Demuestre que las siguientes funciones son derivables en el dominio de definicón que se especifíca:
$a)\ f(z) = \frac{1}{z^4}\quad (z \neq 0)$
$b)\ f(z) = \sqrt(r)e^{i\frac{\theta}{2}}\quad (r > 0, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi)$
$c)\ f(z) = e^{-\theta}\cos(\ln(r)) + ie^{-\theta}\sin(\ln(r))\quad (r > 0, 0 < \theta < 2\pi)$

7) Comprobar que la función $g(z) = \ln r + i\theta \quad (r > 0, 0 < \theta < 2\pi)$ es analítica en el dominio de definición indicado, con derivada $G'(z) = 1/z$.

8) Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio D. Probar que $f(z)$ debe ser constante en D si:
a) $f(z)$ es real para todo punto z que pertenece a D.
b) $|f(z)|$ es constante en D.

9) Sea $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ analítica en un dominio D que no contienen al origen. Usando las ecuaciones de Cauchy-Riemman y suponiendo la continuidad de las derivadas parciales, demostrar que la función $u(r,\theta)$ satisface en D la forma polar de la ecuación de Laplace, $r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta}$, y probar que l mismo es válido para $v(r,\theta)$.