Tarea 10 de Variable Compleja.

Fecha de entrega:

Grupo A 29 de Mayo del 2017, Grupo B 30 de Mayo 2017.

Resuelva los siguientes problemas.

1.- Evaluar la integral impropia

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{(x^2+1)^2}dx \qquad \text{con} \quad -1 < a < 3 \qquad \text{y} \;\; x^a = e^{a\ln x}$$

2.- Usar la función

$$f(z) = \frac{z^{1/3}\log z}{z^2+1} = \frac{e^{(1/3)\log z}\log z}{z^2+1} \qquad \left(|z| > 0, -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}\right)$$

para deducir

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}ln(x)}{x^2+1}dx = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

3.- Probar que

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x^2+1)} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

integrando una rama apropiada de la funcion multivaluada

$$f(z) = \frac{z^{-1/2}}{z^2+1} = \frac{e^{-(1/2)\log z}}{z^2+1}.$$

4.- La función beta es la función de dos variables reales

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt \quad (p>0, q>0)$$

Hacer la sustitución $t = 1/(x+1)$, para demostrar que

$$B(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin{(p\pi)}} \quad (0 < p < 1)$$

5.- Usar residuos para calcular las siguientes integrales

$$a) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta}, \quad b) \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta d\theta}{5-4\cos 2\theta}, \quad c) \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta d\theta}{1-2a\cos\theta + a^2}, \quad d) \int_0^{\pi} \sin^{2n}\theta d\theta \quad (n = 1, 2\ldots).$$