Tarea 1 de Variable Compleja.

Fecha de entrega:

Grupo A 1 de Febrero del 2017.

Grupo B 2 de Febrero 2017.

Resuelva los siguientes problemas.

1.- Usando $|z_1 - z_2|$ que es la distancia entre los puntos z_1 y z_2, justificar que

a) $|z - 4i| + |z + 4i| = 10$ representa una elipse con focos en $(0, \pm 4)$

b) $|z - 1| = |z + i|$ representa la recta que pasa por el origen con pendiente -1.

2) Seguir los pasos indicados para mostrar la desigualdad del triángulo

a) Probar que $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = z_1\bar{z}_1 + (z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2}) + z_2\bar{z}_2$.

b) Argumentar por qué, $z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2} = 2Re(z_1\bar{z}_2) \leq 2|z_1||z_2|$.

c) Usando los resultados anteriores, mostrar que $|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$ y deducir la desigualdad del triángulo.

3) Demuestre que $\cos n\theta + i \sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$

4) Usar la fórmula binominal y la de Moivre para ver que

$$\cos n\theta + i\sin n\theta = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) \cos^{n-k}\theta (i\sin\theta)^k \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

A continuación definir el entero m como

$$m = \begin{cases} n/2 & \text{si n es par} \\ (n-1)/2 & \text{si n es impar} \end{cases}$$

y usar la suma para obtener la expresión

$$\cos n\theta = \sum_{k=0}^{m} \left(\begin{array}{c} n \\ 2k \end{array} \right) (-1)^k \cos^{n-2k}\theta \sin^{2k}\theta \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

5) En cada caso hallar las raices en coordenadas cartesianas

a) $(-16)^{\frac{1}{4}}$ b) $(-8 - 8\sqrt{3}i)^{\frac{1}{4}}$

6) Probar que si $c \neq 1$ y es cualquier raiz enésima de 1, probar que

$$1 + c + c^2 + c^3 + \ldots + c^{n-1} = 0$$

7) Demuestre que dado un polinómio de grado n definido en los complejos, si z_0 es una raiz entonces $\bar{z}_0$ también es solución.

8) Hallar los puntos de acumulación para cada uno de los siguientes conjuntos.

a) $z_n = i^n \ \ (n = 1, 2, \ldots)$ b)$z_n = (-1)^n(1 + i)\frac{n-1}{n} \ \ (n = 1, 2 \ldots)$

9) Representar graficamente los siguientes dominios y discutir si son dominios

a) $|z - 2 - i| \leq 1$ b)$2z + 3 > 4$ c) Im $z > 1$

10) Factorizando $z^4 - 4z^2 + 3$ en dos factores cuadráticos, demostrar que si z está en la circunferencia $|z| = 2$, entonces:

$$\left| \frac{1}{z^4 - 4z^2 + 3} \right| \leq \frac{1}{3}$$