CAPITULO 3

CERTEZA Y VALIDEZ

3.1 *Introducción*

En nuestro estudio de Lógica, nos hemos ocupado de probar la validez de conclusiones dadas ciertas premisas. Hemos aprendido que si las premisas son afirmaciones ciertas, entonces las conclusiones que se siguen lógicamente de ellas han de ser ciertas. Se pueden encontrar algunos razonamientos referentes a proposiciones en lenguaje corriente en los que sabemos que las premisas son afirmaciones ciertas y que las conclusiones son también ciertas. ¿Indica esto que la forma de inferencia que va de dichas premisas a la conclusión es lógicamente válida? La respuesta es, *no*. Pueden presentarse otros casos de razonamientos del mismo tipo en los que las premisas sean ciertas, pero la conclusión sea falsa. Un caso aislado en el que premisas ciertas conduzcan a conclusiones ciertas no es suficiente para demostrar que una inferencia dada es válida.

Se puede decir que un razonamiento es válido sólo cuando se puede sostener la afirmación indicando cada una de las reglas de inferencia empleadas para cada proposición deducida. En el Capítulo 2 se dieron algunas reglas de inferencia que permiten sostener esta afirmación de validez. Se presenta la cuestión: ¿Es posible que existan inferencias proposicionales válidas sin que las reglas dadas sean suficientes para apoyarlas?

Supóngase que alguien sugiere como regla de inferencia que si se tiene la proposición $P \rightarrow Q$, entonces se puede deducir la proposición $\neg P \vee Q$. De otra forma, que si $P \rightarrow Q$ es una proposición cierta, entonces la proposición $\neg P \vee Q$ ha de ser siempre cierta. La inferencia es, en efecto, válida. Pero si se considera la lista de reglas de inferencia estudiadas hasta ahora, no se encuentra ninguna que permita pasar directamente de esta premisa a la conclusión.

Hay muchos casos de estos, de inferencias válidas, para las que no se ha introducido ninguna regla específica. Puesto que cada inferencia que se sugiere es o no válida, desearíamos poder demostrar la validez o la no validez de la misma, sin duda alguna. Si se puede llegar a la conclusión utilizando nuestras reglas, entonces es válida. Si se puede encontrar un caso del tipo de la inferencia sugerida en el que las premisas son ciertas y la conclusión es falsa, entonces se sabe que es un razonamiento no válido porque premisas válidas conducen únicamente a conclusiones válidas.

Pero supongamos que después de muchas tentativas no se ha podido encontrar una demostración. *Esto* no demuestra que no sea válido el razonamiento. Y si suponemos que después de mucho tiempo no se ha podido hallar ningún ejemplo que demuestre que el razonamiento no es válido, *esto* tampoco demuestra que es válido. Lo que se necesita en estos casos es un método general para demostrar la validez o la no validez. El propósito de este capítulo y del siguiente es introducir un método que será adecuado para tratar cada ejemplo posible de inferencia proposicional.

● 3.2 *Valores de certeza y términos de enlace de certeza funcional*

Se empezará con la idea de que cada proposición ha de tener un *valor de certeza;* cada proposición ha de ser cierta o falsa. El valor de certeza de una proposición cierta es *cierto,* y el valor de certeza de una proposición falsa es *falso.* Cada proposición atómica o molecular tiene uno de estos dos valores de certeza posibles.

Si se conocen los valores de certeza de las proposiciones atómicas dentro de proposiciones moleculares, entonces es posible dar los valores de certeza de las proposiciones moleculares; pues los cinco términos de enlace que se han empleado para formar proposiciones moleculares son términos de enlace de *certeza funcional.* En consecuencia la certeza o falsedad de una proposición molecular depende completamente de la certeza o falsedad de las proposiciones atómicas que la componen. Para determinar la certeza o falsedad de cada proposición molecular sólo es necesario conocer la certeza o falsedad de sus proposiciones atómicas y los términos de enlace que las ligan. Se estudiará por separado cada término de enlace de proposiciones y se verá cuál es su comportamiento.

Conjunción. «y» es un término de enlace de certeza funcional, de manera que se puede decidir el valor de certeza de la proposición P & Q si se conocen los valores de certeza de la proposición P y de la proposición Q. La conjunción de dos proposiciones es cierta si y sólo si ambas proposiciones son ciertas. Por tanto, si P & Q ha de ser una proposición cierta, entonces P ha de ser cierta y Q ha de ser cierta. No importa aquí cuáles sean las dos proposiciones que se han unido por medio del término de enlace «y». En Lógica se pueden ligar dos proposiciones cualesquiera para formar una conjunción. No se requiere que el contenido de una de ellas tenga relación con el contenido de la otra.

Hay cuatro combinaciones posibles de valores de certeza para proposiciones de la forma P y Q. Recordando que la certeza de la conjunción

P & **Q** depende de los valores de certeza de aquéllas, se trata de hallar las combinaciones para las que la conjunción **P** & **Q** será una proposición cierta. Las cuatro combinaciones posibles son:

P es cierta y **Q** es cierta.
P es cierta y **Q** es falsa.
P es falsa y **Q** es cierta.
P es falsa y **Q** es falsa.

La regla práctica para conjunciones es: *La conjunción de dos proposiciones es cierta si y sólo si ambas proposiciones son ciertas.* Así se concluye:

Si **P** es cierta y **Q** es cierta, entonces **P** & **Q** es cierta.
Si **P** es cierta y **Q** es falsa, entonces **P** & **Q** es falsa.
Si **P** es falsa y **Q** es cierta, entonces **P** & **Q** es falsa.
Si **P** es falsa y **Q** es falsa, entonces **P** & **Q** es falsa.

Ejercicio 1

A. Juan dice, «Mi cumpleaños es en agosto y el cumpleaños de Ana es al mes siguiente». Nos enteramos que el cumpleaños de Juan es en agosto pero que se ha equivocado respecto al cumpleaños de Ana, pues es en noviembre. La proposición de Juan, ¿es cierta o falsa? ¿Puede explicar la respuesta de acuerdo con la regla del uso de la conjunción?

B. Decir si **P** & **Q** es cierta (C) o falsa (F) en cada uno de los casos siguientes:

1. Si **P** es una proposición cierta y **Q** es una proposición cierta.
2. Si **P** es una proposición cierta pero **Q** es una proposición falsa.
3. Si ambas **P** y **Q** son proposiciones falsas.
4. Si ni **P** ni **Q** son proposiciones falsas.
5. Si **P** es una proposición falsa pero **Q** es una proposición cierta.

Negación. El término de enlace «no» es de certeza funcional porque la certeza o falsedad de una negación depende enteramente de la certeza o falsedad de la proposición que niega. La regla práctica es: *La negación de una proposición cierta es falsa y la negación de una proposición falsa es cierta.*

Apliquemos lo dicho a un ejemplo de una negación en lenguaje corriente. Se considera la negación,

Juan no es hermano de Luisa.

Para conocer la certeza o falsedad de esta proposición se necesita sólo conocer la certeza o falsedad de la proposición.

Juan es hermano de Luisa.

Si la segunda proposición es cierta, entonces la primera proposición, su negación, ha de ser falsa. Si la segunda proposición es falsa, entonces la primera proposición ha de ser cierta.

Tratemos de la negación $\neg P$. La proposición P puede ser cierta o falsa. Los valores de certeza posibles para la negación $\neg P$ son:

Si P es cierta, entonces $\neg P$ es falsa.
Si P es falsa, entonces $\neg P$ es cierta.

Ejercicio 2

A. Indicar cuando $P \ \& \ \neg Q$ es cierta (C) o falsa (F) en cada uno de los siguientes casos:

1. Si P es falsa y Q es cierta.
2. Si P es cierta y Q es falsa.
3. Si ambas P y Q son ciertas.
4. Si ambas P Q son falsas.
5. Si P es cierta y $\neg Q$ es cierta.

Disjunción. El término de enlace «o» es también un término de enlace de certeza funcional. Pero al considerar la certeza o falsedad de cada disjunción se ha de tener en cuenta que se ha utilizado el sentido *incluyente* de la palabra «o». Esto significa que en cualquier disjunción, por lo menos, una de las dos proposiciones es cierta y quizá ambas. Lo que se requiere es que *por lo menos* un miembro sea cierto. La regla práctica es: *La disjunción de dos proposiciones es cierta si y sólo si por lo menos una de las dos proposiciones es cierta.* Una vez más queda claro que para conocer la certeza o falsedad de la proposición $P \vee Q$ se ha de conocer la certeza o falsedad de las proposiciones P y Q.

Considérese la proposición en lenguaje corriente:

O Antonio ganó una apuesta en las carreras o ganó una apuesta en fútbol.

Para saber si la proposición es cierta o falsa es necesario saber si las proposiciones «Juan ganó una apuesta en las carreras» y «ganó una apuesta en fútbol» son proposiciones ciertas o falsas. Si por lo menos una de ellas es una proposición cierta, entonces la disjunción total es cierta. Además, si ambas proposiciones son ciertas, entonces la disjunción es también una proposición cierta. Si las proposiciones son ambas falsas, entonces evidentemente la disjunción ha de ser falsa.

Puesto que la disjunción liga dos proposiciones, también se tienen cuatro combinaciones posibles de certeza o falsedad. Para la disjunción $P \vee Q$ las cuatro posibilidades son, como en el caso de la conjunción,

P es cierta y Q es cierta.
P es cierta y Q es falsa.
P es falsa y Q es cierta.
P es falsa y Q es falsa.

Al determinar los valores de certeza de $P \vee Q$, se encuentra:

Si P es cierta y Q es cierta, entonces $P \vee Q$ es cierta.
Si P es cierta y Q es falsa, entonces $P \vee Q$ es cierta.
Si P es falsa y Q es cierta, entonces $P \vee Q$ es cierta.
Si P es falsa y Q es falsa, entonces $P \vee Q$ es falsa.

Ejercicio 3

A. Indicar si $P \vee Q$ es cierta (C) o falsa (F) en cada uno de los siguientes casos:

1. Si P es falsa pero Q es cierta.
2. Si P y Q son ambas ciertas.
3. Si P es cierta y Q es falsa.
4. Si P es falsa y Q es falsa.
5. Si P y Q son ambas proposiciones falsas.

B. Indicar si $\neg R \vee \neg S$ es cierta (C) o falsa (F) en cada uno de los siguientes casos:

1. Si R es cierta y S es cierta.
2. Si R es falsa y S es cierta.
3. Si R es cierta y S es falsa.
4. Si R es falsa y S es falsa.
5. Si a la vez R y S son ciertas.

Proposiciones condicionales. Si se conoce la certeza o falsedad de P y Q, entonces también se conoce la certeza o falsedad de $P \rightarrow Q$; porque la certeza o falsedad de $P \rightarrow Q$ es función, o depende, de la certeza o falsedad del antecedente y del consecuente. «Si... entonces...» es un término de enlace de certeza funcional.

Es decir, se sabe si es cierta o falsa una proposición tal como

(1) Si hay un eclipse entonces salen las estrellas

cuando se sepa si son ciertas o falsas las proposiciones «Hay un eclipse» y «Las estrellas salen».

De nuevo hay cuatro combinaciones posibles de certeza o falsedad de las dos proposiciones atómicas. Sólo dos de las posibilidades se presentan con frecuencia en el lenguaje ordinario. Primero, si «Hay un eclipse» es cierta y «Salen las estrellas» es cierta, la (1) ha de ser cierta. Segundo, si el antecedente «Hay un eclipse» es cierta pero el consecuente «Salen las estrellas» es falsa, entonces la (1) es falsa. Pero si suponemos que el antecedente es falso, no hay eclipse, y en Lógica, como la no existencia de eclipse no permite juzgar sobre la proposición (1), tanto si el consecuente: «Salen las estrellas» es cierto como si es falso, se dice que la condicional (1) es cierta. Este criterio se sigue también en Ciencias y en Matemáticas. Así la condicional (1) se puede considerar en un sentido amplio, según el cual sólo comunica lo que ocurrirá *si* hay un eclipse, por lo cual no se puede dar una calificación de falsedad a la proposición si no hay eclipse. Así en Lógica, si el antecedente de una condicional es falso, entonces toda la condicional se considera cierta, sin tener en cuenta si el consecuente es cierto o falso.

Examinando los cuatro casos anteriores se ve que la condicional completa es cierta si el consecuente «Salen las estrellas» es cierto independientemente de que el antecedente sea cierto o falso. Esto es consecuencia de que el único caso en que la condicional completa es falsa es cuando el antecedente «Hay un eclipse» es cierto, mientras que el consecuente «Salen las estrellas» es falso.

Si la regla que se acaba de exponer parece rara es porque se acostumbra a pensar que, en una proposición condicional, la verdad de hecho del consecuente depende en algún sentido de la verdad de hecho del antecedente. En Lógica no ocurre así. El contenido del antecedente no necesita estar relacionado en absoluto con el contenido del consecuente. Se puede considerar el valor de certeza de:

(2) Si el día es frío, entonces $3+3=6$,

a pesar de que efectivamente las dos proposiciones atómicas no tienen nada que ver una con la otra. Puesto que el consecuente de (2) es evidentemente una proposición cierta, (2) ha de ser a su vez una proposición cierta. La regla práctica es: *Una proposición condicional es falsa si el antecedente es cierto y el consecuente es falso; en todo otro caso la proposición condicional es cierta.* Como en el caso de las otras proposiciones moleculares que contienen ambas proposiciones **P** y **Q**, **P** ⟶ **Q** tiene cuatro posibilidades de certeza y falsedad. Son:

P es cierta y **Q** es cierta.
P es cierta y **Q** es falsa.
P es falsa y **Q** es cierta.
P es falsa y **Q** es falsa.

Puesto que el valor de certeza de **P** ⟶ **Q** está determinado únicamente por la certeza o falsedad de la sentencia **P** y de la sentencia **Q**, se pueden analizar sus valores de certeza de la manera siguiente:

Si **P** es cierta y **Q** es cierta, entonces **P** ⟶ **Q** es cierta.
Si **P** es cierta y **Q** es falsa, entonces **P** ⟶ **Q** es falsa.
Si **P** es falsa y **Q** es cierta, entonces **P** ⟶ **Q** es cierta.
Si **P** es falsa y **Q** es falsa, entonces **P** ⟶ **Q** es cierta.

Observando la lista anterior se ve que siempre que el antecedente de una proposición condicional es falso, la proposición condicional es una proposición cierta; y también que, siempre que el consecuente de una proposición condicional es cierto, la proposición condicional es una proposición cierta. El único caso en que la proposición condicional es falsa es el caso en que el antecedente es cierto pero el consecuente es falso.

EJERCICIO 4

A. María dice, «Si este escrito es correcto, entonces $5 \times 2 = 10$». Se sabe que $5 \times 2 = 10$. Desde el punto de vista de la Lógica, ¿qué se puede decir del valor de certeza de la afirmación de María? ¿Por qué?

B. Indicar si **P** ⟶ **Q** es cierto (C) o falso (F) en cada uno de los siguientes casos:

1. Si **P** y **Q** son ambas falsas.
2. Si **P** es cierta y **Q** es falsa.
3. Si **P** es cierta y **Q** es cierta.
4. Si **P** es falsa y **Q** es cierta.
5. Si **P** y **Q** son ambas ciertas.

C. Indicar si **R** ⟶ ¬**S** es cierta (C) o falsa (F) en cada uno de los casos siguientes:

1. Si **R** y **S** son ambas falsas.

2. Si **R** y **S** son ambas ciertas.
3. Si **R** es cierta y **S** es falsa.
4. Si **R** es falsa y **S** es cierta.
5. Si ni **R** ni **S** son proposiciones ciertas.

Equivalencia: Proposiciones bicondicionales. Se han considerado también proposiciones moleculares que contienen el término de enlace «si y sólo si». Estas proposiciones, las bicondicionales, se denominan también equivalencias. Un ejemplo de una equivalencia es

(1) Usted puede votar si y sólo si está inscrito.

Puesto que «si y sólo si» es un término de enlace de certeza funcional, la certeza o falsedad de la equivalencia depende de la certeza o falsedad de sus partes. Es decir, el valor de certeza de (1) depende de la certeza o falsedad de «Usted puede votar» y «Usted está inscrito».

Si ambas proposiciones «Usted puede votar» y «Usted está inscrito» son proposiciones ciertas, entonces la proposición bicondicional (1) es cierta. Además, si ambas proposiciones o miembros de la proposición bicondicional son falsos la proposición (1) es una proposición cierta. Por otra parte, si uno de los miembros de una proposición bicondicional es falso, aunque el otro miembro sea cierto, entonces la proposición bicondicional es una proposición falsa. La regla de uso quedará clara si se recuerda que una proposición bicondicional, o equivalencia, $P \leftrightarrow Q$ tiene en esencia el mismo significado que dos condicionales, $P \rightarrow Q$ y $Q \rightarrow P$. En consecuencia, siempre que se tenga una proposición bicondicional con un miembro cierto y un miembro falso, entonces una de las implicaciones que contiene tendrá un antecedente cierto y un consecuente falso, por lo que la proposición completa, será falsa.

La regla práctica para equivalencias es:

Una proposición condicional es cierta si y sólo si sus dos miembros son ambos ciertos o ambos falsos.

De nuevo, puesto que la proposición bicondicional contiene dos miembros que ambos pueden ser o ciertos o falsos, hay cuatro combinaciones posibles de certeza o falsedad. Son:

P es cierta y **Q** es cierta.
P es cierta y **Q** es falsa.
P es falsa y **Q** es cierta.
P es falsa y **Q** es falsa.

Los valores de certeza de cualquier proposición bicondicional **P** $\leftrightarrow$ **Q** pueden determinarse de la manera siguiente:

> Si **P** es cierta y **Q** es cierta, entonces **P** $\leftrightarrow$ **Q** es cierta.
> Si **P** es cierta y **Q** es falsa, entonces **P** $\leftrightarrow$ **Q** es falsa.
> Si **P** es falsa y **Q** es cierta, entonces **P** $\leftrightarrow$ **Q** es falsa.
> Si **P** es falsa y **Q** es falsa, entonces **P** $\leftrightarrow$ **Q** es cierta.

Ejercicio 5

Decir si **P** $\leftrightarrow$ **Q** es cierta (C) o falsa (F) en cada uno de los casos siguientes:

A. 1. Si **P** es cierta y **Q** es falsa.
2. Si ambas **P** y **Q** son ciertas.
3. Si **P** es falsa y **Q** es cierta.
4. Si **P** es cierta y **Q** es cierta.
5. Si **P** es falsa y **Q** es falsa.

B. ¿Es **P** $\leftrightarrow \neg$**P** siempre cierta, siempre falsa, o depende el valor de certeza de esta equivalencia del valor de certeza de **P**?

● 3.3 *Diagrama de valores de certeza*

Independientemente de la longitud y de lo complicada que sea una proposición molecular, se pueden hallar sus valores de certeza si se conocen los valores de certeza de sus partes. Así se hará para cada tipo de proposición molecular utilizando las reglas prácticas que se han expuesto en las secciones que preceden a ésta. Una forma de analizar el valor de certeza de una proposición molecular es estableciendo un diagrama. Se supone que se tiene la proposición: (**P** $\vee$ **Q**) & **R** donde **P** es una proposición cierta, **Q** es una proposición falsa y **R** es una proposición cierta. El diagrama tendrá entonces la forma

$$
\begin{array}{ccccc}
(\mathbf{P} & \vee & \mathbf{Q}) & \& & \mathbf{R} \\
\mathrm{C} & & \mathrm{F} & & \mathrm{C} \\
 & \mathrm{C} & & & \\
 & & & \mathrm{C} &
\end{array}
$$

Se empieza con las proposiciones atómicas, luego la proposición molecular menor, en este caso P ∨ Q, y se continúa hasta el enlace final que une los dos miembros del término de enlace dominante. Para una proposición atómica, la «C» o «F» se pone inmediatamente debajo de la letra atómica. Para una proposición molecular, la «C» o «F» se pone debajo del término de enlace que domina la proposición. El término de enlace dominante en el ejemplo es «y». Puesto que P es cierta, la proposición P ∨ Q es cierta de acuerdo con la regla de aplicación para las disjunciones. Por tanto, se escribe la letra «C» en el enlace que une los dos miembros de la disjunción. Para que el término de enlace dominante, la conjunción, sea una proposición cierta, sus partes han de ser ciertas. Se ve que en este caso es así, puesto que P ∨ Q es cierta y el otro miembro de la conjunción R es también cierto. El enlace más largo que une el término de enlace dominante tiene una «C», lo que indica que la proposición completa es una proposición cierta.

Se considera ahora el ejemplo,

(P & Q → P) & (R ∨ S)

donde P es cierta, Q es cierta, R es falsa y S es falsa. (Antes de continuar se ha de advertir que si una proposición atómica se presenta más de una vez dentro de una proposición molecular completa, entonces ha de ser tratada *de la misma manera* cada vez que se presenta. Por consiguiente, si la proposición P es cierta en una parte de la proposición molecular, entonces ha de ser cierta cada vez que se presenta en esta proposición. Si la proposición Q es falsa ha de ser falsa siempre que se presente. En el ejemplo anterior, la proposición P se presenta dos veces. Cualesquiera que sean sus valores de certeza, ha de tener el mismo valor de certeza las dos veces que se presenta.)

El diagrama de este ejemplo tendrá la forma:

(P & Q → P) & (R ∨ S)

C C C F F

C F

C

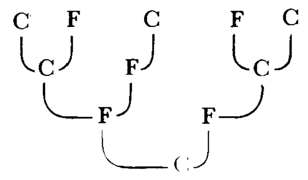
F

Se empieza por las proposiciones moleculares más pequeñas y se continúa en orden creciente de complicación. Los primeros enlaces son para la conjunción y la disjunción; luego se puede añadir el enlace para la proposición condicional, P & Q → P. Se termina con el enlace que une las dos partes de la conjunción, puesto que la conjunción es el término de enlace dominante. Según resulta, el primer miembro de la conjunción es cierto, pero el segundo miembro es falso. Por tanto, la misma conjunción, la proposición molecular completa, es una proposición falsa. Obsérvese que la proposición **P** es cierta en ambos casos tal como se había exigido. El último ejemplo será una proposición molecular un poco más complicada:

$$[(A \lor B) \ \& \ \neg A] \rightarrow \neg(C \rightarrow A).$$

En esta proposición sea **A** cierta, **B** falsa, y **C** falsa. El diagrama que sigue muestra que la proposición completa, que es condicional, es una proposición cierta.

$$[(A \lor B) \ \& \ \neg A] \rightarrow \neg(C \rightarrow A).$$



Obsérvese la proposición que es una negación. Puesto que **A** es una proposición cierta, entonces $\neg A$ es falsa. Obsérvese también que el término de enlace dominante es $\rightarrow$, y por tanto su enlace se dibuja el último. En el caso de la condicional, el antecedente era falso y el consecuente era cierto. La regla práctica para las condicionales indica que en este caso la condicional es una proposición cierta.

En el ejercicio siguiente se pide el diagrama de certeza de algunas proposiciones moleculares. Si no se recuerdan bien las reglas prácticas para alguno de los términos de enlace, se puede consultar la sección anterior en la que se expusieron las reglas correspondientes.

Ejercicio 6

A. Determinar los valores de certeza de las siguientes proposiciones por medio de sus diagramas, si **P** y **Q** son proposiciones ciertas y **A** y **B** son proposiciones falsas.

1. $P \rightarrow (P \rightarrow Q)$

2. $(A \rightarrow P) \rightarrow (P \rightarrow A)$
3. $(P \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow P)$
4. $(P \rightarrow A) \rightarrow (\neg P \rightarrow \neg A)$
5. $\neg(P \ \& \ Q) \rightarrow (\neg P \lor \neg Q)$
6. $\neg(P \ \& \ B) \rightarrow (\neg P \ \& \ \neg B)$
7. $[(P \ \& \ Q) \rightarrow B] \rightarrow [P \rightarrow (Q \rightarrow B)]$
8. $\neg[(P \lor B) \ \& \ (B \lor A)]$
9. $(\neg P \lor B) \lor (\neg B \ \& \ A)$
10. $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (Q \rightarrow P)$

B. ¿Cuáles de las proposiciones siguientes son ciertas, si se supone:

N = «Nueva York es más grande que Chicago»
W = «Nueva York está al norte de Washington»
C = «Chicago es más grande que Nueva York»
(N y W son ciertas y C es falsa)?

1. $N \lor C$
2. $N \ \& \ C$
3. $\neg N \ \& \ \neg C$
4. $N \leftrightarrow \neg W \lor C$
5. $W \lor \neg C \rightarrow N$
6. $(W \lor N) \rightarrow (W \rightarrow \neg C)$
7. $(W \leftrightarrow \neg N) \leftrightarrow (N \leftrightarrow C)$
8. $(W \rightarrow N) \rightarrow [(N \rightarrow \neg C) \rightarrow (\neg C \rightarrow W)]$

C. Sea

P = '2+4=6'
Q = '2+8=10'
R = '3×4=12'
S = '2×0=2'.

Se conocen los valores de certeza de P, Q, R, y S. Hallar los valores de certeza de las proposiciones siguientes:

1. $(P \ \& \ Q) \ \& \ (R \ \& \ S) \rightarrow P \lor S$
2. $P \ \& \ Q \leftrightarrow R \ \& \ \neg S$

3. $(P \rightarrow Q) \rightarrow [(Q \rightarrow R) \rightarrow (R \rightarrow S)]$
4. $(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (S \leftrightarrow R)$
5. $(P \ \& \ Q) \lor S \rightarrow (P \leftrightarrow S)$
6. $(P \rightarrow \neg Q) \leftrightarrow (P \lor R) \ \& \ S$
7. $(Q \ \& \ R) \ \& \ S \rightarrow (P \leftrightarrow S)$
8. $(\neg P \rightarrow Q) \rightarrow (S \rightarrow R)$
9. $S \rightarrow P \ \& \ Q$
10. $P \ \& \ Q \rightarrow S$

D. Sean «$x=0$» y «$x=y$» ciertas, y sean «$y=z$» y «$y=w$»falsas. Hallar los valores de certeza de las proposiciones siguientes.

1. Si $x=0$ y $x=y$, entonces $y \neq z$.
2. Si $x \neq 0$ o $y=w$, entonces $y=z$.
3. Si $x \neq y$ o $y \neq z$, entonces $y=w$.
4. Si $x \neq 0$ o $x \neq y$, entonces $y \neq z$.
5. Si $x=0$, entonces $x \neq y$ o $y \neq w$.
6. Si $x \neq 0$, entonces $y=z$.

• 3.4 *Conclusiones no válidas*

Hasta aquí todos los ejercicios de este libro en los que se pedía deducir conclusiones de conjuntos de premisas eran de tal naturaleza que la conclusión que se buscaba era efectivamente válida: se deducía de las premisas dadas. La Lógica sería realmente una materia trivial si siempre se supiera de antemano que la conclusión era consecuencia de las premisas. Evidentemente no ocurre así. Se ha de estar preparado para afrontar situaciones en las que no se sabe si la conclusión particular es o no consecuencia de las premisas dadas. Se desea poder probar cuándo una conclusión no es consecuencia lógica y cuándo una inferencia particular es *no válida.*

Supongamos dado un conjunto de premisas, y se trata de demostrar que cierta conclusión es consecuencia lógica de estas premisas, pero no se sabe deducir la conclusión deseada. Esto no basta para suponer que la proposición no es válida o que no se deduce de las premisas. Ha de existir algún método que permita demostrar sin género de duda que una conclusión no es consecuencia de las premisas dadas. A continuación se da un ejemplo de una demostración de esta naturaleza.

El razonamiento siguiente es no válido:

Si tú eres su hijo entonces él es tu padre.
Él es tu padre.
Entonces, tú eres su hijo.

Decir que este razonamiento no es válido es decir que la conclusión no es consecuencia lógica de las premisas. Al hablar de validez o no validez de las conclusiones se hace referencia a la *forma* del razonamiento. Respecto a su forma lógica, un razonamiento o es válido o es no válido. Si se simboliza el razonamiento, la misma forma se ve más fácilmente. Simbolizado, el razonamiento se presentaría en la forma

$$\begin{array}{l} P \rightarrow Q \\ Q \\ \hline P \end{array}$$

Si ésta fuera una forma válida, permitiría *siempre* deducir sólo conclusiones ciertas de premisas ciertas. Por tanto, si hay algún caso en que esta forma permite deducir una conclusión falsa de premisas que son ciertas, entonces no puede ser válida. Para demostrar que un razonamiento no es válido se busca una *interpretación* de este razonamiento en el que las premisas sean proposiciones ciertas y la conclusión sea una proposición falsa. Se puede interpretar el razonamiento sustituyendo sus distintas proposiciones atómicas por proposiciones cualesquiera elegidas al arbitrio. La forma ha de permanecer siempre la misma.

Para demostrar que el razonamiento anterior no es válido se podría interpretar en la forma siguiente:

Sea

$P =$ «Usted es un ciudadano de Maine»
$Q =$ «Usted es un ciudadano de los Estados Unidos».

La interpretación diría:

> Si usted es un ciudadano de Maine, entonces usted es un ciudadano de los Estados Unidos.
> Usted es un ciudadano de los Estados Unidos.
> Por tanto, usted es un ciudadano de Maine.

Hay ciertamente muchos casos en los que estas premisas son proposiciones ciertas, pero la conclusión es falsa. Para cada ciudadano de los Estados Unidos las premisas son ciertas, pero para muchos ciudadanos de los Estados Unidos la conclusión es falsa. La forma del razonamiento original nos permite deducir una conclusión falsa de premisas ciertas. Por tanto, se ha demostrado que el razonamiento no es válido.

Este razonamiento que se acaba de considerar es un ejemplo de un error corriente: el error de «afirmar el consecuente». Lo importante en esta interpretación no era el contenido de las proposiciones «Usted es un ciudadano de Maine» y «Usted es un ciudadano de los Estados Unidos», sino sus valores de certeza posibles.

EJERCICIO 7

A. Los razonamientos siguientes no son válidos. Para cada razonamiento, dar una asignación de certeza que demuestre su invalidez.

1. Si María termina pronto, entonces se irá a casa con Rosa.
   O se irá a casa con Rosa o encontrará a Antonia.
   María termina pronto.
   Por tanto, no encontrará a Antonia.
2. O el agua está fría o el día no es caluroso.
   El día es caluroso.
   Si el estanque se acaba de llenar, entonces el agua está fría.
   Por tanto, el estanque se acaba de llenar.
3. Jorge es elegido si y sólo si la votación es numerosa.
   La votación es numerosa.
   O Jorge es elegido o Juan no será nombrado.
   Por tanto, Juan será nombrado.
4. Si Pedro es elegido ganador, entonces Juan está fuera de combate.
   Si Pedro es elegido ganador, entonces Miguel está también fuera de combate.
   Juan está fuera de combate y Miguel está fuera de combate también.
   Por tanto, Pedro es elegido ganador.
5. O el animal no es un pájaro o tiene alas.
   El animal es un pájaro, entonces pone huevos.
   El animal no tiene alas.
   Por tanto, no pone huevos.
6. O la sustracción no es siempre posible en el sistema de números o el sistema incluye otros números además de los naturales.
   Si la sustracción es siempre posible en el sistema de números, entonces el sistema incluye los enteros negativos.
   El sistema no incluye otros números que los naturales.
   Por tanto, el sistema no incluye los enteros negativos.

B. Si cada uno de los razonamientos simbolizados a continuación es válido, dar una deducción de la conclusión por medio de una demostración formal completa. Si alguno no es válido, demostrarlo mediante una asignación de certeza.

1. Demostrar: $\neg S$
   (1) $T \,\&\, S \leftrightarrow R$
   (2) $\neg R$
   (3) T

2. Demostrar: S
   (1) $Q \rightarrow R$
   (2) $P \rightarrow Q$
   (3) $P \vee T$
   (4) $T \rightarrow S$
   (5) $\neg R$

3. Demostrar: $\neg Q$
   (1) $T \rightarrow Q$
   (2) $\neg T \vee R$
   (3) $\neg R$

4. Demostrar: S
   (1) $R \vee S$
   (2) $\neg P$
   (3) $Q \vee \neg R$
   (4) $P \leftrightarrow Q$

5. Demostrar: T
   (1) $\neg(P \vee Q)$
   (2) $P \vee R$
   (3) $T \rightarrow R$

6. Demostrar: $\neg R$
   (1) $P \rightarrow T$
   (2) $Q \rightarrow S$
   (3) $S \vee R$
   (4) $P \vee \neg Q$

7. Demostrar: $\neg S$
   (1) $\neg(P \ \& \ R)$
   (2) $Q \rightarrow R$
   (3) $Q \vee \neg S$

8. Demostrar: $\neg P$
   (1) $Q \rightarrow R$
   (2) $\neg R \rightarrow S$
   (3) $\neg T \vee \neg P$
   (4) $(Q \rightarrow S) \rightarrow T$

9. Demostrar: $R \vee \neg Q$
   (1) $S \ \& \ \neg T$
   (2) $T \rightarrow P$
   (3) $S \rightarrow R$
   (4) $\neg P \rightarrow \neg Q$

10. Demostrar: $\neg T$
   (1) $\neg P$
   (2) $\neg Q \vee \neg R$
   (3) $Q \leftrightarrow P$
   (4) $T \rightarrow R$

C. Mostrar por medio de una deducción formal o una asignación de certeza si cada uno de los razonamientos siguientes es válido o no válido:

1. O Juan y José tienen la misma edad, o Juan es mayor que José.
   Si Juan y José tienen la misma edad, entonces Pedro y Juan no tienen la misma edad.
   Si Juan es mayor que José, entonces Juan es mayor que María.
   Por tanto o Pedro y Juan no tienen la misma edad o Juan es mayor que María.
2. Si es diciembre, entonces el mes anterior fue noviembre.
   Si el mes anterior fue noviembre, entonces hace seis meses fue junio.
   Si hace seis meses fue junio, entonces hace once meses fue enero.
   Si el mes que viene será enero, entonces éste es diciembre.
   El mes pasado fue noviembre.
   Por tanto, éste es diciembre.
3. Si el contrato es válido, entonces Juan no perderá el pleito.
   Si Juan pierde el pleito, entonces tendrá que pagar costas.
   Si ha de pagar costas, entonces Pedro no recibirá su dinero.

Por tanto, o Pedro no recibirá su dinero o el contrato no es válido.

4. Si María está en lo cierto, entonces Jaime está equivocado.
   Si Jaime está equivocado, entonces Luis también está equivocado.
   Si Luis está también equivocado, entonces el espectáculo no es esta noche.
   O el espectáculo es esta noche o José no lo verá.
   María está en lo cierto.
   Por tanto, José no verá el espectáculo.
5. Si Brown cumplió el contrato, entonces las mercancías fueron suministradas en la fecha convenida.
   Brown o cumplió el contrato o su registro de envío está equivocado.
   Si su registro de envío está equivocado, entonces él no ordenó el envío el día siete.
   Por tanto, las mercancías no fueron suministradas en la fecha convenida.
6. $x^2=9 \quad \rightarrow \quad x=3 \quad \vee \quad x=-3$
   $x-3 \quad \vee \quad x=-3 \quad \rightarrow \quad xy<20$
   $xy \nless 20$
   Por tanto: $x^2=9 \quad \vee \quad xy<20$
7. $x^2=9 \quad \rightarrow \quad x=3 \quad \vee \quad x=-3$
   $x=3 \quad \vee \quad x=-3 \quad \rightarrow \quad xy<20$
   $xy \nless 20$
   Por tanto: $x^2 \neq 9$
8. $x \neq 0$
   $x=0 \quad \vee \quad \neg(x<1 \quad \vee \quad y \ngtr x)$
   $y>x \quad \rightarrow \quad y>1 \quad \& \quad x+y>2$
   Por tanto: $y>1 \quad \rightarrow \quad x<1$
9. $x \neq 0$
   $x=0 \quad \vee \quad \neg(x<1 \quad \vee \quad y \ngtr x)$
   $y>x \quad \rightarrow \quad y>1 \quad \& \quad x+y>2$
   Por tanto: $x+y>2 \quad \& \quad y>1$
10. $x^2-3x+2=0 \quad \rightarrow \quad x=1 \quad \vee \quad x=2$
    $x=1 \quad \vee \quad x=2 \quad \rightarrow \quad 3x>x^2$
    $3x \ngtr x^2$
    Por tanto: $3x>x^2 \quad \vee \quad x=1$

D. En las deducciones que siguen hay varios errores. Buscar los errores y corregirlos de manera que las demostraciones formales queden perfectamente correctas.

1.	(1) P	P	2.	(1) $P \& Q$	P
	(2) $\neg T \vee \neg Q$	P		(2) $P \rightarrow \neg R$	P
	(3) $\neg Q \rightarrow \neg P$	P		(3) $Q \rightarrow \neg S$	P
	(4) $\neg\neg P$	DN 1		(4) P	S 1
	(5) $\neg Q$	TT 3, 4		(5) $\neg R$	TT 2, 4
	(6) $\neg T$	TT 2, 6		(6) Q	A 1
				(7) $\neg S$	PP 2, 6
				(8) $\neg R \& S$	A 5, 7
				(9) $\neg(R \vee S)$	DS 8

3.	(1) $R \rightarrow Q$	P
	(2) $P \rightarrow Q$	P
	(3) $P \vee R$	P
	(4) $T \& S$	P
	(5) $Q \vee Q$	DS 1, 2, 3
	(6) Q	DN 5
	(7) S	A 4
	(8) $Q \& S$	A 5, 6
	(9) $(Q \& S) \vee U$	DS 8

● 3.5 *Demostración condicional*

Al llegar a este punto en el estudio de la Lógica estamos en condiciones de realizar algunas demostraciones complicadas. Sin embargo, hay algunas deducciones muy simples que no es posible efectuarlas con las reglas introducidas. Un ejemplo de una conclusión obvia que no se puede deducir todavía es la siguiente:

Si José gana, entonces Luis es segundo.
Si Carlos es segundo, entonces Luis no es segundo.
Por tanto, si Carlos es segundo, entonces José no gana.

Simbolicemos este razonamiento para decidir si somos o no capaces de demostrar su validez:

Sea

$P =$ «José gana»
$Q =$ «Luis es segundo»
$R =$ «Carlos es segundo».

La simbolización del razonamiento completo es:

$$\begin{array}{l} P \rightarrow Q \\ R \rightarrow \neg Q \\ \hline R \rightarrow \neg P \end{array}$$

Las reglas que se conocen no son suficientes para deducir la conclusión en este razonamiento. También sería imposible encontrar una asignación de certeza en la que las premisas fueran ciertas y la conclusión falsa. Para que la conclusión sea falsa **R** y **P** han de ser ambas ciertas. Pero entonces, una u otra de las premisas es falsa cualquiera que sea el valor de la asignación de certeza dado a **Q**. Para deducir la conclusión, que es válida, se necesita una regla que no ha sido introducida hasta ahora.

La *regla de las premisas,* regla P, permite introducir una nueva premisa en una demostración siempre que se desee. Ésta puede ser cualquier proposición que se elija. En principio puede parecer absurdo, pues si se puede introducir cualquier premisa en cualquier momento parece que introduciendo la premisa conveniente se podrá probar cualquier cosa que se desee. La cuestión está, evidentemente, en que cada razonamiento lógico se apoya en *todas las* premisas que utiliza. Si se introduce una premisa nueva, entonces cualquier conclusión que se deduzca del conjunto total de premisas, se apoyará sobre todas estas premisas y no sólo sobre el conjunto original de las mismas. Es decir, cada razonamiento lógicamente correcto no es mejor o peor que las premisas en las que se apoya. No es posible utilizar la regla P para deducir precisamente cualquier conclusión de un conjunto de premisas *dado,* pues en el momento que se introduce una premisa nueva, cada proposición deducida, depende, ya entonces de *todas* las premisas que se utilicen, incluyendo la premisa nueva.

Para indicar el conjunto completo de premisas sobre las que se basa una conclusión se utilizará el método siguiente. Cada vez que se introduce una premisa nueva en una deducción se moverá inmediatamente toda la demostración unos pocos espacios hacia la derecha. Esto indicará que cualquier proposición que sea deducida en esta parte derecha de la demostración final depende no sólo del conjunto original de premisas dado, sino también de la premisa adicional introducida.

El ejemplo dado anteriormente permite presentar un caso del nuevo uso de la regla P. En la línea (3) se introduce una nueva premisa R. A partir de esta línea hacia abajo obsérvese que la demostración se ha corrido varios espacios hacia la derecha.

(1)	$P \rightarrow Q$	P
(2)	$R \rightarrow \neg Q$	P
(3)	$\quad R$	P
(4)	$\quad \neg Q$	PP 2, 3
(5)	$\quad \neg P$	TT 1, 4

En la deducción precedente obsérvese la letra mayúscula P después de la proposición R en la tercera línea. Esto indica que la proposición agregada R está justificada por la regla de las premisas, regla P. Y al moverla varios lugares hacia la derecha se indica que R no es una de las premisas originales. Utilizando R, se podía deducir la proposición $\neg P$. La proposición $\neg P$, sin embargo, no se apoya sólo sobre el conjunto original de premisas, sino sobre el nuevo conjunto de premisas formado añadiendo la proposición R. Es esencial indicar que $\neg P$ no se deduce del razonamiento original mismo y que no es consecuencia lógica de las proposiciones $P \rightarrow Q$ y $R \rightarrow \neg Q$.

Se podría resumir la idea total en esta deducción diciendo que de las premisas originales, *si* se agrega la R, entonces se puede llegar a la conclusión $\neg P$. Esta idea está muy próxima a la de la nueva regla que se va a introducir y que permitirá completar la deducción en el razonamiento original hasta llegar a la conclusión. Considerando el razonamiento se ve que se intenta demostrar la proposición condicional $R \rightarrow \neg P$.

Esta nueva regla, la *regla de la demostración condicional* (CP) se enuncia como sigue:

> *Si es posible deducir una proposición* S *de otra proposición* R *y un conjunto de premisas, entonces se puede deducir sólo del conjunto de premisas la proposición condicional* $R \rightarrow S$.

En la deducción anterior era posible deducir la proposición $\neg P$ de la proposición añadida R y del conjunto original de premisas. Por tanto, se puede deducir la proposición condicional $R \rightarrow \neg P$ del conjunto de premisas solo. Puesto que la proposición condicional $R \rightarrow \neg P$ se deduce solamente del conjunto de premisas dado, se mueve esta línea de demostración hacia la izquierda de manera que se ponga en columna con las premisas originales.

La deducción completa de la conclusion a partir de las premisas en este ejemplo, se presenta ahora en la forma:

(1)	$P \rightarrow Q$	P
(2)	$R \rightarrow \neg Q$	P
(3)	R	P
(4)	$\neg Q$	PP 2, 3
(5)	$\neg P$	TT 1, 4
(6)	$R \rightarrow \neg P$	CP 3, 5

Obsérvese en la deducción completa anterior, que se deduce la línea (6) por medio de la demostración condicional, utilizando las líneas (3) y (5). En la línea (3) se introduce el antecedente de la condicional y en la línea (5) se ha deducido el consecuente de la proposición condicional. Obsérvese también que la línea (6) se ha corrido hacia la izquierda para ponerla en columna con las premisas originales. Esto es debido a que la línea (6) se apoya únicamente en el conjunto original de premisas.

La idea intuitiva de una demostración condicional es realmente muy simple. La conclusión deseada es una proposición condicional, con el término de enlace «si... entonces...». En el ejemplo anterior, la conclusión que se desea lograr es «si R entonces $\neg P$». Al preguntar si la conclusión es consecuencia de las premisas dadas, se pregunta efectivamente si con las premisas dadas, *si* se tiene R entonces se puede obtener $\neg P$. En la línea (3) se dice, «Permítasenos agregar R, y veremos». La línea (5) muestra que si tenemos R y el conjunto original de premisas se puede deducir «si R entonces $\neg P$».

Una buena estrategia a seguir es ésta: Si la conclusión deseada de un razonamiento es una proposición condicional, añadiremos el antecedente como nueva premisa, correremos la demostración varios lugares hacia la derecha y finalmente trataremos de deducir el consecuente del conjunto original de premisas más la premisa añadida. Si se puede deducir el consecuente añadiendo el antecedente como una premisa, entonces por la regla CP se puede demostrar que la proposición condicional es consecuencia del conjunto original de premisas, y la demostración se podrá situar corriéndola hacia la izquierda debajo de las premisas originales. No siempre es necesario utilizar la demostración condicional para deducir una proposición condicional como conclusión. Pero si no se ve otra posible deducción se introducirá el antecedente como nueva premisa, para intentar una demostración condicional.

Otro ejemplo del uso de una demostración condicional en una deducción es el que se da a continuación. La conclusión que se desea es la proposición $D \rightarrow C$.

(1)	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	P
(2)	$\neg D \vee A$	P
(3)	B	P
(4)	D	P
(5)	A	TP 2, 4