1. Si esta es una sociedad matriarcal, entonces el hermano de la madre es el cabeza de familia. Si el hermano de la madre es el cabeza de familia, entonces el padre no tiene autoridad. Esta es una sociedad matriarcal. Por tanto, el padre no tiene autoridad.
2. O esta roca es una roca ígnea o es una roca sedimentaria. Esta roca es granito. Si esta roca es granito entonces no es una roca sedimentaria. Por tanto, esta roca es una roca ígnea.
3. Si Juan es más alto que Pedro, entonces María es más baja que Juana. María no es más baja que Juana. Si Juan y Luis tienen la misma estatura, entonces Juan es más alto que Pedro. Por tanto, Juan y Luis no tienen la misma estatura.
4. Si A ganó la carrera, entonces o B fue el segundo o C fue el segundo. Si B fue el segundo, entonces A no ganó la carrera. Si D fue el segundo, entonces C no fue el segundo. A ganó la carrera. Entonces, D no fue el segundo.
5. Si el reloj está adelantado, entonces Juan llegó antes de las diez y vio partir el coche de Andrés. Si Andrés dice la verdad, entonces Juan no vio partir el coche de Andrés. O Andrés dice la verdad o estaba en el edificio en el momento del crimen. El reloj está adelantado. Por tanto, Andrés estaba en el edificio en el momento del crimen.

**B.** En los ejercicios que siguen, las premisas están ya en forma simbólica Dar una deducción completa de la proposición que sea desea demostrar.

1. Demostrar: $Q$
   (1) $S \rightarrow (P \vee Q)$
   (2) $S$
   (3) $\neg P$

2 Demostrar: $R$
   (1) $S \rightarrow \neg T$
   (2) $T$
   (3) $\neg S \rightarrow R$

3. Demostrar: $S \;\&\; T$
   (1) $P \;\&\; R$
   (2) $P \rightarrow S$
   (3) $R \rightarrow T$

4. Demostrar: $\neg S$
   (1) $T \rightarrow R$
   (2) $R \rightarrow \neg S$
   (3) $T$

5. Demostrar: $T$
   (1) $P \rightarrow S$
   (2) $\neg S$
   (3) $\neg P \rightarrow T$

6. Demostrar: $S \;\&\; T$
   (1) $P \rightarrow S$
   (2) $P \rightarrow T$
   (3) $P$

7. Demostrar: $S$
   (1) $P \vee Q$
   (2) $\neg Q$
   (3) $P \rightarrow S$

8. Demostrar: $S$
   (1) $T \rightarrow R$
   (2) $\neg R$
   (3) $T \vee S$

9. Demostrar: $\neg T$
   (1) $P \rightarrow S$
   (2) $P \,\&\, Q$
   (3) $(S \,\&\, R) \rightarrow \neg T$
   (4) $Q \rightarrow R$

10. Demostrar: $\neg R$
   (1) $S \vee \neg R$
   (2) $T \rightarrow \neg S$
   (3) $T$

11. Demostrar: $S$
   (1) $P \rightarrow (Q \,\&\, R)$
   (2) $P$
   (3) $T \rightarrow \neg Q$
   (4) $T \vee S$

12. Demostrar: $\neg Q$
   (1) $T \vee \neg S$
   (2) $S$
   (3) $Q \rightarrow \neg T$

13. Demostrar: $Q \vee R$
   (1) $S \rightarrow \neg T$
   (2) $T$
   (3) $\neg S \rightarrow (Q \vee R)$

14. Demostrar: $S$
   (1) $\neg T \vee R$
   (2) $T$
   (3) $\neg S \rightarrow \neg R$

15. Demostrar: $\neg R$
   (1) $Q \,\&\, T$
   (2) $Q \rightarrow \neg R$
   (3) $T \rightarrow \neg R$

**C.** Dar una demostración formal completa de los razonamientos siguientes:

1. Demostrar: $y+8<12$
   (1) $x+8=12 \quad \vee \quad x \neq 4$
   (2) $x=4 \quad \& \quad y<x$
   (3) $x+8=12 \quad \& \quad v<x \quad \rightarrow \quad y+8<12$

2. Demostrar: $x<4 \quad \& \quad y<6$*
   (1) $x+2<6 \quad \rightarrow \quad x<4$
   (2) $y<6 \quad \vee \quad x+y \nless 10$
   (3) $x+y<10 \quad \& \quad x+2<6$

3. Demostrar: $x=5 \quad \& \quad x \neq y$

* Por conveniencia se introducen las notaciones $\nless$ y $\ngtr$ para «no es menor que» y «no es mayor que» de manera que «$\neg(x<y)$» se puede escribir «$x \nless y$» y «$\neg(x>y)$»se puede escribir «$x \ngtr y$».

(1) $x=y \rightarrow x \neq y+3$
(2) $x=y+3 \vee x+2=y$
(3) $x+2 \neq y \ \& \ x=5$

4. Demostrar: $y>z$
(1) $x=y \rightarrow x=z$
(2) $x \neq y \rightarrow x<z$
(3) $x \nless z \vee y>z$
(4) $y \neq z \ \& \ x \neq z$

5. Demostrar: $x<5$
(1) $x<y \vee x=y$
(2) $x=y \rightarrow y \neq 5$
(3) $x<y \ \& \ y=5 \rightarrow x<5$
(4) $y=5$

6. Demostrar: $\text{tag}\theta \neq 0{,}577$
(1) $\text{tag}\theta=0{,}577 \rightarrow \text{sen}\theta=0{,}500 \ \& \ \cos\theta=0{,}866$
(2) $\text{sen}\,\theta=0{,}500 \ \& \ \cos\theta=0{,}866 \rightarrow \cot\theta=1{,}732$
(3) $\sec\theta=1{,}154 \vee \cot\theta \neq 1{,}732$
(4) $\sec\theta \neq 1{,}154$

7. Demostrar: $\neg(y>7 \vee x=y)$
(1) $x<6$
(2) $y>7 \vee x=y \rightarrow \neg(y=4 \ \& \ x<y)$
(3) $y \neq 4 \rightarrow x \nless 6$
(4) $x<6 \rightarrow x<y$

8. Demostrar: $x>6$
(1) $x>5 \rightarrow x=6 \vee x>6$
(2) $x \neq 5 \ \& \ x \nless 5 \rightarrow x>5$
(3) $x<5 \rightarrow x \neq 3+4$
(4) $x=3+4 \ \& \ x \neq 6$
(5) $x=3+4 \rightarrow x \neq 5$

9. Demostrar: $x=4$
(1) $3x+2y=18 \ \& \ x+4y=16$
(2) $x=2 \rightarrow 3x+2y \neq 18$
(3) $x=2 \vee y=3$
(4) $x \neq 4 \rightarrow y \neq 3$

10. Demostrar: $x<3$
    (1) $x+2>5 \rightarrow x=4$
    (2) $x=4 \rightarrow x+4 \not< 7$
    (3) $x+4<7$
    (4) $x+2>5 \vee (5-x>2 \;\&\; x<3)$

## ● 2.4 *Más sobre paréntesis*

En el primer capítulo se aprendió que los paréntesis hacen el mismo papel en Lógica que ciertos símbolos de puntuación y ciertas palabras hacen en nuestro lenguaje cuotidiano. Los paréntesis indican el agrupamiento en proposiciones moleculares, en las que distintas agrupaciones pueden dar lugar a distintos significados. Por ejemplo, una proposición simbolizada en la forma:

$$(\mathbf{A} \;\&\; \mathbf{B}) \vee \mathbf{C}$$

no tiene el mismo significado que una proposición simbolizada en la forma:

$$\mathbf{A} \;\&\; (\mathbf{B} \vee \mathbf{C}).$$

En el segundo agrupamiento se está cierto de que se presenta **A**, y se está cierto también que o **B** o **C** se presenta. En el primer agrupamiento no se está cierto de ninguna de las proposiciones. Sólo se sabe que o **A** & **B** o **C** se presenta.

Al deducir conclusiones de conjuntos de premisas es esencial el uso correcto de los paréntesis, pues de otra forma no se puede estar seguro de la aplicación de las reglas. Sea, por ejemplo, la proposición:

$$\mathbf{A} \;\&\; \mathbf{Q} \vee \mathbf{R}.$$

Sin paréntesis que indiquen el agrupamiento, no se puede decir cuál es el término de enlace dominante ni se puede decir si la proposición es una conjunción o una disjunción. No se puede saber, pues, si se puede utilizar la ley de simplificación o quizá el *modus tollendo ponens*.

Se puede indicar el término de enlace dominante utilizando paréntesis. Si la proposición está agrupada en la forma:

$$(\mathbf{P} \;\&\; \mathbf{Q}) \vee \mathbf{R}$$

entonces es una disjunción y el término de enlace dominante es «o». Es la disjunción cuyo primer miembro es una proposición molecular (una conjunción) y cuyo segundo miembro es una proposición atómica. Si está agrupada

(2) $$P \mathbin{\&} (Q \vee R)$$

entonces es una conjunción. Se podría aplicar la regla de simplificación a la proposición (2) y deducir P, pero *no* se puede deducir P de la proposición (1). Tanto el significado de los proposiciones como la aplicación correcta de las reglas de inferencia dependen del uso correcto de los paréntesis.

Indicado el agrupamiento de las proposiciones simbolizadas, el paréntesis nos mostrará cuál es el término de enlace dominante en la proposición. Se recordará que el término de enlace condicional es más fuerte que los de conjunción, disjunción o negación. Cuando se presenta en una proposición con cualquiera de los otros, no es necesario el paréntesis para indicar que es el término de enlace dominante. Como «o» e «y» son igualmente fuertes se necesita paréntesis para indicar cuál es el dominante. Ambos «y» y «o» son más fuertes que «no», de manera que $\neg$ se aplica sólo a la proposición más corta delante de la que está colocado, *salvo* que un paréntesis indique que se aplica a una proposición molecular más larga, como ocurre en las proposiciones siguientes:

$$\neg(P \rightarrow Q)$$

y

$$\neg(P \vee Q).$$

## EJERCICIO 10

**A.** ¿Tiene la proposición $\neg Q \mathbin{\&} R$ distinto significado que la proposición $\neg(Q \mathbin{\&} R)$? En caso afirmativo, explicar la diferencia.

**B.** Supóngase que una proposición ha sido simbolizada en la forma: $(\neg Q \mathbin{\&} R)$ ¿Tiene esta proposición el mismo significado que alguna de las del ejercicio **A**?

**C.** Se supone que se ha dado como primera premisa la proposición $P \rightarrow Q \vee R$ . La segunda premisa es la proposición $\neg(Q \vee R)$. ¿Se puede deducir una conclusión de estas premisas? ¿Se puede cambiar de sitio el paréntesis de la segunda premisa y deducir una conclusión? Justificar la respuesta.

**D.** En cada una de las proposiciones siguientes, indicar cuál es el término de enlace dominante y qué clase de proposición es (conjunción, disjunción, negación o condicional).

1. $\neg R \vee S$
2. $P \to Q \;\&\; R$
3. $(P \to Q) \;\&\; R$
4. $A \;\&\; B \to C$
5. $P \vee (R \;\&\; S)$
6. $\neg(Q \;\&\; R)$
7. $(P \;\&\; Q) \vee (R \;\&\; S)$
8. $(A \to B) \;\&\; (B \to C)$
9. $\neg A \to B \vee C$
10. $\neg(P \to Q)$
11. $(A \;\&\; B) \vee C$
12. $(P \;\&\; Q) \to (A \;\&\; B)$
13. $\neg(P \to Q \;\&\; R)$
14. $P \to Q \vee R$
15. $(P \to Q) \vee R$

**E.** Completar la simbolización de las proposiciones siguientes añadiendo paréntesis donde sea necesario, de manera que la proposición simbolizada corresponda al nombre que se le ha dado.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $P \to R \;\&\; S$ | A conjunción |
| 2. | $P \;\&\; R \vee S$ | A conjunción |
| 3. | $A \;\&\; B \to C$ | A condicional |
| 4. | $P \;\&\; R \vee S$ | A disjunción |
| 5. | $\neg P \to R$ | A condicional |
| 6. | $\neg P \to R$ | A negación |
| 7. | $\neg P \;\&\; \neg R$ | A conjunción |
| 8. | $\neg P \;\&\; R$ | A negación |
| 9. | $A \to B \vee C$ | A disjunción |
| 10. | $A \to B \vee C$ | A condicional |
| 11. | $\neg P \vee Q$ | A negación |
| 12. | $\neg P \vee Q$ | A disjunción |
| 13. | $P \to Q \;\&\; R \to S$ | A conjunción |
| 14. | $\neg \neg A \to B$ | A negación |
| 15. | $\neg P \vee \neg Q$ | A disjunción |

**F.** Para cada uno de los conjuntos de premisas siguientes se ha establecido una conclusión. En algunos casos, la conclusión es consecuencia lógica sólo si se añaden paréntesis que indiquen la agrupación adecuada. Añadir los paréntesis cuando sean necesarios a fin de hacer la conclusión válida.

1. $P \to Q \;\&\; R$ Premisa

   $R$ Conclusión

2. $P \to Q \;\&\; R$ Premisa

   $\neg Q \;\&\; R$ Premisa

   $\neg P$ Conclusión

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3. $Q \& P \vee S$ | Premisa | 4. $P \rightarrow Q \& S$ | Premisa |
| | | $P$ | Premisa |
| $Q$ | Conclusión | $Q \& S$ | Conclusión |

## • 2.5 *Otras reglas de inferencia*

La lista de reglas dadas hasta aquí es un poco corta y esto limita un poco los tipos de deducciones que pueden hacerse. Con algunas reglas más estaríamos en condiciones de efectuar más demostraciones. Se recordará que las reglas dadas permiten pasar de ciertas proposiciones a otras proposiciones que son consecuencia de ellas. Siempre que las primeras proposiciones sean ciertas, las proposiciones que se deducen por las reglas de la Lógica son también ciertas.

*Ley de adición.* La *ley de adición* expresa el hecho que si se tiene una proposición que es cierta, entonces la disjunción de aquella proposición y otra cualquiera ha de ser también cierta. Si se da la proposición $P$, entonces la proposición $P \vee Q$ es consecuencia.

Para justificarlo, recuérdese el significado de una disjunción. La disjunción $P \vee Q$ indica que por lo menos una de las dos proposiciones ligadas por el término de enlace «o» ha de ser cierta. Recuérdese que *sólo* una ha de ser necesariamente cierta. *Puesto que se ha dado* $P$ *como proposición cierta, se sabe que* $P \vee Q$ *ha de ser una proposición cierta;* y esto es precisamente lo que se entiende por una conclusión lógica válida. Cuando una premisa es cierta, la conclusión que se sigue de ella *ha* de ser cierta.

Con ejemplos en lenguaje ordinario se ve lo obvia que es esta regla. Si, como premisa cierta, se ha dado:

Este libro es azul,

entonces se sabe que la proposición siguiente ha de ser cierta.

O este libro es azul o es rojo.

Se puede también concluir:

O este libro es azul o es viejo

o

O este libro es azul o es nuevo,

y así sucesivamente. En todos estos ejemplos una parte es cierta y esto es todo lo que se necesita para que una disjunción sea cierta.

En forma simbólica, si se tiene la proposición $P$, se puede concluir $P \vee Q$, o $P \vee R$, o $S \vee P$, o $T \vee P$, y así sucesivamente. La abreviatura para la ley de adición es LA.

Ejemplos de la ley de adición son:

| | | |
|---|---|---|
| *a.* | (1) $Q$ | P |
| | (2) $Q \vee \neg R$ | LA 1 |
| *b.* | (1) $\neg R$ | P |
| | (2) $S \vee \neg R$ | LA 1 |
| *c.* | (1) $T \& S$ | P |
| | (2) $(T \& S) \vee R$ | LA 1 |
| *d.* | (1) $T \vee R$ | P |
| | (2) $(P \& S) \vee (T \vee R)$ | LA 1 |

Obsérvese que el orden en que se usan no importa. De $P$ se puede deducir $P \vee Q$ o se puede deducir $Q \vee P$.

## Ejercicio 11

**A.** Dar cinco proposiciones que resulten de la premisa siguiente

Algunos juegos son fáciles de aprender.

**B.** Si las conclusiones son consecuencia de las premisas en los ejemplos que siguen, escribir la palabra «válido». Si es válido, completar la demostración indicando la regla o reglas usadas y las líneas a las que se ha aplicado una regla. Si no se ha aplicado una regla de inferencia de las aprendidas, póngase una «X» junto a la conclusión.

1. (1) $P$ P
   Por tanto: $P \vee Q$

2. (1) $Q$ P
   Por tanto: $Q \vee \neg R$

3. (1) $P$ P
   (2) $P \vee Q \rightarrow R$ P
   Por tanto: $R$

4. (1) $Q \vee R \rightarrow S$ P
   (2) $R$ P
   Por tanto: $S$

5. (1) $T$ P
   (2) $S \vee T \rightarrow Q$
   Por tanto: $Q$
6. (1) $\neg R$ P
   (2) $\neg S \vee \neg R \rightarrow \neg P$ P
   Por tanto: $\neg P$
7. (1) $\neg T$ P
   Por tanto: $\neg T \vee \neg P$
8. (1) $\neg P$ P
   Por tanto: $Q \vee \neg P$
9. (1) $P$ P
   Por tanto: $P \ \& \ \neg Q$
10. (1) $R \ \& \ S \rightarrow T$ P
    (2) $R$
    Por tanto: $T$

**C.** Indicar una deducción de las conclusiones que siguen de los conjuntos de premisas dados. Hacer una demostración formal, indicando el número de cada paso, la justificación de cada línea mediante la abreviatura de la regla utilizada y los números de las líneas de las que se deduce cada paso.

1. Demostrar: $T \vee S$
   (1) $Q \vee T$
   (2) $Q \rightarrow R$
   (3) $\neg R$
2. Demostrar: $R \vee \neg T$
   (1) $P$
   (2) $\neg R \rightarrow \neg P$
3. Demostrar: $R \vee \neg S$
   (1) $S \ \& \ Q$
   (2) $T \rightarrow \neg Q$
   (3) $\neg T \rightarrow R$
4. Demostrar: $Q$
   (1) $\neg S$
   (2) $T \rightarrow S$
   (3) $\neg T \vee R \rightarrow Q$
5. Demostrar: $U$
   (1) $P \ \& \ \neg T$
   (2) $S \rightarrow T$
   (3) $S \vee Q$
   (4) $Q \vee P \rightarrow U$
6. Demostrar: $T \vee Q$
   (1) $S \rightarrow P \ \& \ Q$
   (2) $S$
   (3) $P \ \& \ Q \rightarrow T$

**D.** Dar una demostración formal de los siguientes razonamientos:

1. Demostrar: $y \nless 4 \quad \vee \quad x > 2$
   (1) $x > 3 \quad \vee \quad y \nless 4$
   (2) $x > 3 \quad \cdot \quad x > y$
   (3) $x \ngtr y$

Á

2. Demostrar: $x>y \quad \vee \quad y \nless 6$
   (1) $x>y \quad \vee \quad x>5$
   (2) $x \ngtr 5 \quad \vee \quad y \nless 6$
   (3) $x+y=1 \quad \& \quad x>y$

3. Demostrar: $x \neq 3 \quad \vee \quad x>2$
   (1) $x+2 \neq 5 \quad \vee \quad 2x=6$
   (2) $x+2 \neq 5 \quad \rightarrow \quad x \neq 3$
   (3) $2x-2=8 \quad \rightarrow \quad 2x \neq 6$
   (4) $x+3=8 \quad \& \quad 2x-2=8$

4. Demostrar: $\text{tag}\,30^\circ=0.577 \quad \vee \quad \cos 60^\circ=0.5$
   (1) $\text{sen}\,30^\circ=0.5 \quad \rightarrow \quad \csc 30^\circ=2.0$
   (2) $\text{sen}\,30^\circ=0.5$
   (3) $\csc 30^\circ=2.0 \quad \rightarrow \quad \text{tag}\,30^\circ=0.577$

5. Demostrar: $x=5 \quad \& \quad x \neq 4$
   (1) $x=2 \quad \rightarrow \quad x<3$
   (2) $x \neq 4 \quad \& \quad x \nless 3$
   (3) $x \neq 2 \quad \vee \quad x>4 \quad \rightarrow \quad x=5$

6. Demostrar: $x=2$
   (1) $Dx^3=3x^2 \quad \& \quad D3=0$
   (2) $Dx^3=3x^2 \quad \rightarrow \quad Dx^2=2x$
   (3) $Dx^2=2x \quad \vee \quad Dx^3=12 \quad \rightarrow \quad x=2$

7. Demostrar: $x-3$
   (1) $x-2=1 \quad \& \quad 2-x \neq 1$
   (2) $x=1 \quad \rightarrow \quad 2-x=1$
   (3) $x=1 \quad \vee \quad x+2=5$
   (4) $x+2=5 \quad \vee \quad x-2=1 \quad \rightarrow \quad x=3$

8. Demostrar: $y=x \quad \vee \quad y>x$
   (1) $y<6 \quad \rightarrow \quad y<x$
   (2) $y \nless 6 \quad \vee \quad x=5 \quad \rightarrow \quad y>x$
   (3)

9. Demostrar: $y<3 \quad \vee \quad x>5$
   (1) $y<4 \quad \& \quad x=y+3$
   (2) $\neg(x \neq y+3) \quad \rightarrow \quad x>2$
   (3) $y \ngtr 2 \quad \rightarrow \quad x \ngtr 2$
   (4) $y>2 \quad \vee \quad y=3 \quad \rightarrow \quad x>5$

$y \nless x$

10. Demostrar: $(x=4 \lor y \neq 8) \ \& \ x<3$
    (1) $x=y \lor x<y$
    (2) $y=x+4$
    (3) $(x<3 \lor x>5) \ \& \ y=x+4 \rightarrow y \neq 8$
    (4) $x \neq y$
    (5) $y=6 \lor x<y \rightarrow x<3$

*Ley del silogismo hipotético.* Primero examinaremos un ejemplo de la *ley del silogismo hipotético,* cuya abreviatura es HS. De las premisas

(1) Si hace calor, entonces Juana va a nadar.
(2) Si Juana va a nadar, entonces arregla la casa después de comer.

Se puede concluir:

(3) Si hace calor, entonces arregla la casa después de comer.

Para simbolizar el razonamiento, sea

D = «Hace calor»
S = «Juana va a nadar»
H = «Arregla la casa después de comer».

Entonces

| | |
|---|---|
| (1) $D \rightarrow S$ | P |
| (2) $S \rightarrow H$ | P |
| (3) $D \rightarrow H$ | HS |

La conclusión es una proposición condicional. Ambas premisas son proposiciones condicionales. La conclusión no dice que hace calor ni que Juana arregla la casa después de comer. Sólo dice lo que ocurrirá *si* hace calor. Considérense las dos premisas e imagínese que el antecedente de la primera premisa es cierto. Si es así, entonces el consecuente de la segunda se deduciría con seguridad. Esto es exactamente lo que dice la conclusión condicional. Simbólicamente, si se tiene la proposición $D \rightarrow S$ y la proposición $S \rightarrow H$ y si también se tuviera la proposición D, entonces se podría aplicar *modus ponendo ponens* dos veces y obtener H. Abreviadamente, si es D entonces es H, o $D \rightarrow H$. Pero esto es precisamente lo que se concluye de $D \rightarrow S$ y $S \rightarrow H$ mediante HS.

En forma simbólica, la ley del silogismo hipotético es:

| | |
|---|---|
| de | |
| y | $Q \rightarrow R$ |
| se puede concluir | $P \rightarrow R$ |

Puede resultar conveniente considerar que para aplicar la regla HS, se dan los tres pasos siguientes. Primero, se hace una inspección general para comprobar que se tienen las dos condicionales requeridas. Segundo, se comprueba cuidadosamente que el antecedente de una de las condicionales coincida con el consecuente de la otra. Tercero, se forma como conclusión una condicional cuyo antecedente es el otro antecedente de una de las premisas y cuyo consecuente es el consecuente de la otra premisa.

En los ejemplos de la ley del silogismo hipotético dados a continuación, obsérvese que algunos de los antecedentes y consecuentes son proposiciones moleculares. La forma, sin embargo, es la misma.

| | | | |
|---|---|---|---|
| *a.* | (1) | $\neg P \rightarrow \neg Q$ | P |
| | (2) | $\neg Q \rightarrow \neg R$ | P |
| | (3) | $\neg P \rightarrow \neg R$ | HS 1, 2 |
| *b.* | (1) | $\neg P \rightarrow Q \vee R$ | P |
| | (2) | $Q \vee R \rightarrow \neg T$ | P |
| | (3) | $\neg P \rightarrow \neg T$ | HS 1, 2 |
| *c.* | (1) | $S \rightarrow T$ | P |
| | (2) | $T \rightarrow R \vee Q$ | P |
| | (3) | $S \rightarrow R \vee Q$ | HS 1, 2 |
| *d.* | (1) | $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$ | P |
| | (2) | $R \rightarrow (Q \,\&\, T)$ | P |
| | (3) | $(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \,\&\, T)$ | HS 1, 2 |

## EJERCICIO 12

**A.** ¿Qué conclusión se puede sacar, si se puede sacar alguna, por la ley de silogismo hipotético de los conjuntos de proposiciones siguientes?

1. Si el agua se hiela, entonces sus moléculas forman cristales. Si las moléculas forman cristales, entonces el agua aumenta de volumen.
2. Si Tomás conduce a la velocidad de 50 km/h, entonces en 9 horas habrá recorrido 450 km.
   Si en 9 horas ha recorrido 450 km, entonces habrá recorrido 90 km más que ayer en el mismo período.
3. Si Mr. Lincoln es elegido, entonces los Estados del Sur se separarán con seguridad. Si los Estados del Sur se separan, entonces estallará una guerra civil.

4. Si un haz fino de fotones penetra en un gas en una cámara de niebla, entonces los fotones expulsan electrones de los átomos del gas. Si los fotones expulsan electrones de átomos de gas, entonces la energía de la luz se convierte en energía cinética de los electrones.
5. Si el número de representantes en el Senado está en relación con la población de cada Estado, entonces Nueva York tiene más senadores que Nevada. Si Nueva York tiene más senadores que Navada, entonces Nueva York tiene más de dos senadores.

**B.** Traducir los razonamientos en la Sección **A** anterior en símbolos lógicos y demostrar que su conclusión es consecuencia lógica de las premisas.

**C.** El ejemplo 5 en la Sección **A** anterior muestra el carácter *hipotético* de las premisas de un silogismo hipotético. Las premisas son todas ciertas en este ejemplo. Pero, ¿qué se puede decir acerca de la verdad de hecho de las proposiciones atómicas del Ejemplo 5? Se puede añadir una premisa más, que se sabe que es una proposición cierta *(de hecho),* al razonamiento en el ejemplo 5, de forma que se puede probar que sus proposiciones atómicas no son proposiciones ciertas. Indicar cómo se podría probar la negación de aquellas proposiciones atómicas por medio de una demostración simbólica formal.

**D.** Utilizar la ley del silogismo hipotético (HS) en una demostración formal para obtener una conclusión de los siguientes conjuntos de premisas.

1. (1) $Q \to \neg P$
   (2) $\neg P \to R$

2. (1) $P \to R \,\&\, \neg S$
   (2) $R \,\&\, \neg S \to T$

3. (1) $S \lor T \to R \lor Q$
   (2) $R \lor Q \to \neg P$

4. (1) $S \to \neg T$
   (2) $\neg T \to \neg R$

**E.** Indicar una deducción formal de las siguientes conclusiones a partir de las premisas dadas.

1. Demostrar: $\neg T$
   (1) $(Q \to R) \,\&\, P$
   (2) $R \to T$
   (3) $(Q \to R) \to \neg T$

2. Demostrar: $P$
   (1) $\neg R$
   (2) $\neg P \to Q$
   (3) $Q \to R$

3. Demostrar: $Q$
   (1) $\neg R \to S$
   (2) $S \to P \,\&\, Q$
   (3) $R \to T$
   (4) $\neg T$

**F.** Dar demostraciones formales de los siguientes razonamientos.

1. Demostrar: $(2+2)+2=6 \rightarrow 3+3=6$
   (1) $(2+2)+2=6 \rightarrow 3\times2=6$
   (2) $3\times2=6 \rightarrow 3+3=6$

2. Demostrar: $5x-4=3x+4 \rightarrow x=4$
   (1) $5x-4=3x+4 \rightarrow 5x=3x+8$
   (2) $2x=8 \rightarrow x=4$
   (3) $5x=3x+8 \rightarrow 2x=8$

3. Demostrar: $z>6 \vee z<y$
   (1) $x>y \rightarrow x>z$
   (2) $\neg(z>6) \rightarrow \neg(x>y \rightarrow z<7)$
   (3) $x>z \rightarrow z<7$

4. Demostrar: $x=6 \vee x>6$
   (1) $x\neq y \rightarrow y<x$
   (2) $(x>5 \rightarrow y<x) \rightarrow y=5$
   (3) $y\neq5 \vee x=6$
   (4) $x>5 \rightarrow x\neq y$

5. Demostrar: $x>y$
   (1) $x\neq y \rightarrow x>y \vee x<y$
   (2) $x>y \vee x<y \rightarrow x\neq4$
   (3) $x<y \rightarrow \neg(x\neq y \rightarrow x\neq4)$
   (4) $x\neq y$

6. Demostrar: $(y\neq0 \vee x<z) \; \& \; (x<y \rightarrow x=0)$
   (1) $x<y \rightarrow x=0$
   (2) $y=0 \rightarrow x\nless y$
   (3) $x<y \; \& \; z=3$
   (4) $x<y \rightarrow x<z$

7. Demostrar: $\neg(z\neq5) \vee z>5$
   (1) $x=3 \rightarrow x>y$
   (2) $x\neq3 \rightarrow z=5$
   (3) $(x=3 \rightarrow x<z) \rightarrow x\nless z$
   (4) $x>y \rightarrow x<z$

8. Demostrar: $x \neq 3 \quad \vee \quad 4 > x$
   (1) $5x = 20 \quad \rightarrow \quad x = 4$
   (2) $2x = 6 \quad \vee \quad x \neq 3$
   (3) $2x = 6 \quad \rightarrow \quad \neg(5x - 3 = 17 \quad \rightarrow \quad x = 4)$
   (4) $5x - 3 = 17 \quad \rightarrow \quad 5x = 20$

9. Demostrar: $y + z = 8$
   (1) $z = 5 \quad \rightarrow \quad ((y = 3 \quad \rightarrow \quad y + z = 8) \quad \& \quad z > y)$
   (2) $(xy + z = 11 \quad \rightarrow \quad x = 2) \quad \rightarrow \quad (y = 3 \quad \& \quad z = 5)$
   (3) $xy = 6 \quad \rightarrow \quad x = 2$
   (4) $xy + z = 11 \quad \rightarrow \quad xy = 6$

10. Demostrar: $x + z = 3 \quad \rightarrow \quad y = 3$
   (1) $(x + y = 5 \quad \rightarrow \quad y = 3) \quad \vee \quad x + z = 3$
   (2) $z \neq 1 \quad \vee \quad (x + z = 3 \quad \rightarrow \quad x + y = 5)$
   (3) $x + y \neq 5 \quad \& \quad z = 1$

*Ley del silogismo disyuntivo.* La *ley del silogismo disyuntivo,* abreviadamente DS, empieza con una disjunción y dos condicionales. Consideremos el ejemplo:

O llueve o el campo está seco.
Si llueve, entonces jugaremos dentro.
Si el campo está seco, entonces jugaremos a baloncesto.

¿Qué conclusión se puede sacar de estas proposiciones? La conclusión es que o jugaremos dentro o jugaremos a baloncesto. La conclusión es otra disjunción.

A continuación se simboliza el razonamiento anterior para obtener un esquema claro de la forma de un silogismo disyuntivo. Sea

R = «Llueve»
D = «El campo está seco»
P = «Jugaremos dentro»
«Jugaremos a baloncesto».

Este razonamiento se simboliza:

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $R \vee D$ | P |
| (2) | $R \rightarrow P$ | P |
| (3) | $D \rightarrow B$ | P |
| (4) | $P \vee B$ | DS |

B

En símbolos, la ley de silogismo disyuntivo se puede expresar

| | |
|---|---|
| de | $P \vee Q$ |
| y | $P \rightarrow R$ |
| y | $Q \rightarrow S$ |
| se puede deducir | $R \vee S$ |
| o se puede deducir | $S \vee R$. |

Puede ser conveniente considerar que para aplicar la regla DS, se han de dar los tres pasos siguientes: Primero, se hace una inspección general para comprobar que se tienen las dos condicionales y la disjunción requeridas. Segundo, se comprueba cuidadosamente que los dos antecedentes de las dos condicionales son precisamente los dos miembros de la disjunción. Tercero, se forma como conclusión una disjunción cuyos miembros son precisamente los dos consecuentes de las dos condicionales.

A continuación se dan varios ejemplos de la ley del silogismo disyuntivo. En la conclusión se puede poner como primero cualquier miembro de la disjunción.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | (1) | $\neg P \vee Q$ | P |
| | (2) | $\neg P \rightarrow \neg R$ | P |
| | (3) | $Q \rightarrow S$ | P |
| | (4) | $\neg R \vee S$ | DS 1, 2, 3 |
| 2. | (1) | $P \vee Q$ | P |
| | (2) | $P \rightarrow \neg R$ | P |
| | (3) | $Q \rightarrow \neg S$ | P |
| | (4) | $\neg S \vee \neg R$ | DS 1, 2, 3 |
| 3. | (1) | $\neg P \vee \neg Q$ | P |
| | (2) | $\neg P \rightarrow R$ | P |
| | (3) | $\neg Q \rightarrow S$ | P |
| | (4) | $R \vee S$ | DS 1, 2, 3 |
| 4. | (1) | $P \vee \neg Q$ | P |
| | (2) | $P \rightarrow \neg R$ | P |
| | (3) | $\neg Q \rightarrow S$ | P |
| | (4) | $\neg R \vee S$ | DS 1, 2, 3 |
| 5. | (1) | $P \vee Q$ | P |
| | (2) | $P \rightarrow R$ | P |
| | (3) | $Q \rightarrow \neg S$ | P |
| | (4) | $\neg S \vee R$ | DS 1, 2, 3 |

## Ejercicio 13

**A.** ¿Qué se puede concluir de cada uno de los siguientes conjuntos de premisas por la ley del silogismo disyuntivo? Dar como conclusión una proposición en lenguaje corriente.

1. O Juan tiene mayoría o Pedro tiene mayoría. Si Juan tiene mayoría, entonces Pedro será el tesorero. Si Pedro tiene mayoría, entonces Juan será el tesorero.
2. Este número o es un número positivo o es un número negativo. Si es un número positivo, es mayor que cero. Si es un número negativo, es menor que cero.
3. Esta roca o es piedra caliza o es granito. Si es piedra caliza es sedimentaria. Si es granito, es ígnea.
4. O la cámara fue adquirida legalmente por el vendedor o la cámara es mercancía robada. Si la cámara fue adquirida legalmente por el vendedor, entonces es mi cámara. Si la cámara es mercancía robada, entonces Tomás es su propietario legal.
5. O la planta es una planta verde o es una planta no verde. Si es una planta verde, entonces fabrica su propio elemento. Si es una planta no verde, entonces depende de las materias de otras plantas para su alimento.

**B.** Simbolizar los razonamientos en la Sección **A** y demostrar que las conclusiones son consecuencia lógica de las premisas.

**C.** Utilizar la ley del silogismo disyuntivo (DS) para obtener una conclusión de cada uno de los siguientes conjuntos de premisas:

1. (1) $P \vee \neg Q$
   (2) $\neg Q \rightarrow R$
   (3) $P \rightarrow \neg S$
2. (1) $Q \vee R$
   (2) $Q \rightarrow \neg S$
   (3) $R \rightarrow \neg T$
3. (1) $\neg T \vee \neg S$
   (2) $\neg S \rightarrow P$
   (3) $\neg T \rightarrow Q$
4. (1) $(R \& S) \vee T$
   (2) $(R \& S) \rightarrow \neg Q$
   (3) $T \rightarrow P$

**D.** Dar una deducción completamente formal de las siguientes conclusiones a partir de las premisas dadas:

1. Demostrar: $R \;\&\; (P \vee Q)$
   (1) $P \vee Q$
   (2) $Q \rightarrow R$
   (3) $P \rightarrow T$
   (4) $\neg T$

2. Demostrar: $T$
   (1) $P \vee \neg R$
   (2) $\neg R \rightarrow S$
   (3) $P \rightarrow T$
   (4) $\neg S$

3. Demostrar: $\neg Q \;\&\; S$
   (1) $S \;\&\; \neg R$
   (2) $R \vee \neg T$
   (3) $Q \rightarrow T$

4. Demostrar: $S$
   (1) $P \rightarrow Q$
   (2) $Q \rightarrow \neg R$
   (3) $R$
   (4) $P \vee (T \;\&\; S)$

5. Demostrar: $\neg T \;\&\; \neg P$
   (1) $\neg S \vee \neg R$
   (2) $\neg R \rightarrow \neg T$
   (3) $\neg S \rightarrow P$
   (4) $\neg P$

**E.** Dar una demostración formal de cada uno de los razonamientos siguientes:

1. Demostrar: $x=3 \;\vee\; x=2$
   (1) $x+y=7 \;\rightarrow\; x=2$
   (2) $y-x=2 \;\rightarrow\; x=3$
   (3) $x+y=7 \;\vee\; y-x=2$

2. Demostrar: $x>2 \;\vee\; x=2$
   (1) $x<y \;\rightarrow\; x=2$
   (2) $x<y \;\vee\; x \nless y$
   (3) $x \nless y \;\rightarrow\; x>2$

3. Demostrar: $y=1$
   (1) $2x+y=7 \;\rightarrow\; 2x=4$
   (2) $2x+y=5 \;\rightarrow\; y=1$
   (3) $2x+y=7 \;\vee\; 2x+y=5$
   (4) $2x \neq 4$

4. Demostrar: $y=1 \;\vee\; y=9$
   (1) $\neg(x=2 \;\vee\; x=8) \;\rightarrow\; x=6$
   (2) $2x+3y=21 \;\&\; x \neq 6$
   (3) $x=2 \;\rightarrow\; y=9$
   (4) $x=8 \;\rightarrow\; y=1$

5. Demostrar: $\neg(x \nless z) \lor \neg(z \neq 6)$
   (1) $x > 5 \lor y \nless 6$
   (2) $y \nless 6 \rightarrow x < z$
   (3) $x > 5 \rightarrow y < z$
   (4) $y \nless z \;\&\; z = 6$

6. Demostrar: $x \neq 4 \lor x > y$
   (1) $y = 0 \rightarrow xy = 0$
   (2) $y = 0 \lor y \nless 1$
   (3) $xy = 0 \lor xy > 3 \rightarrow x \neq 4$
   (4) $y \nless 1 \rightarrow xy > 3$

7. Demostrar: $y < 12 \lor x < 0$
   (1) $x < y \lor y < x$
   (2) $y < x \rightarrow x > 6$
   (3) $x < y \rightarrow x < 7$
   (4) $(x > 6 \lor x < 7) \rightarrow y \ngtr 11$
   (5) $y > 11 \lor x < 0$

8. Demostrar: $x^2 = 4 \lor x^2 = 9$
   (1) $2x^2 - 10x + 12 = 0 \;\&\; x < 4$
   (2) $x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow x = 2 \lor x = 3$
   (3) $x = 2 \rightarrow x^2 = 4$
   (4) $x = 3 \rightarrow x^2 = 9$
   (5) $2x^2 - 10x + 12 = 0 \rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$

9. Demostrar: $x + 1 \ngtr y \lor x \ngtr 4$
   (1) $(y = 5 \rightarrow x < y) \;\&\; x > 1$
   (2) $y > 5 \lor y = 5$
   (3) $x < y \lor y > 4 \rightarrow x + 1 \ngtr y \;\&\; y < 9$
   (4) $y > 5 \rightarrow y > 4$

10. Demostrar: $x = 4$
   (1) $x = 5 \lor x < y$
   (2) $x > 3 \lor z < 2 \rightarrow z < x \lor y = 1$
   (3) $x < y \rightarrow z < 2$
   (4) $x = 5 \rightarrow x > 3$
   (5) $z < x \rightarrow x = 4$
   (6) $y = 1 \rightarrow \neg(x > 3 \lor z < 2)$

*Ley de simplificación disyuntiva.* Si alguien dice «El equipo de los "Gigantes" ganará o el equipo de los "Gigantes" ganará», se puede concluir que opina simplemente que «El equipo de los "Gigantes" ganará». En forma simbólica el razonamiento es:

$$G \vee G$$

por tanto

$$G.$$

Este es un ejemplo de la ley de simplificación disyuntiva, cuya abreviatura es DP.

Algunos ejemplos de esta ley son:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *a*. | (1) $P \vee P$ | P | *b*. | (1) $\neg Q \vee \neg Q$ | P |
| | (2) $P$ | DP 1 | | (2) $\neg Q$ | DP 1 |

| | | |
|---|---|---|
| *c*. | (1) $(P \& Q) \vee (P \& Q)$ | P |
| | (2) $P \& Q$ | DP 1 |

Obsérvese que las posibilidades de simplificar una disjunción son muchas menos que las de simplificar una conjunción. En el caso de una disjunción las dos proposiciones han de ser exactamente la misma.

Una aplicación importante de la ley de simplificación disyuntiva se presenta cuando un silogismo disyuntivo tiene la siguiente forma especial,

$$P \vee Q$$
$$P \rightarrow R$$
$$Q \rightarrow R$$

Por tanto,

$$R \vee R.$$

En este caso particular se puede simplificar la conclusión $R \vee R$ reduciéndola a $R$. Pues si $R \vee R$ es cierta, entonces $R$ ha de ser cierta. La inferencia de $R \vee R$ *a* $R$ es un ejemplo de la ley de simplificación disyuntiva.

## Ejercicio 14

**A.** Utilizar las leyes del silogismo disyuntivo y simplificación disyuntiva para obtener una conclusión de cada uno de los siguientes conjuntos de premisas simbolizadas.

1. (1) $S \vee \neg T$
   (2) $\neg T \rightarrow R$
   (3) $S \rightarrow R$

2. (1) $\neg Q \rightarrow \neg S$
   (2) $P \vee \neg Q$
   (3) $P \rightarrow \neg S$

3. (1) $S \rightarrow \neg R$
   (2) $T \rightarrow \neg R$
   (3) $S \vee T$

4. (1) $\neg R \rightarrow S$
   (2) $Q \vee \neg R$
   (3) $Q \rightarrow S$

**B.** Si se cree que el razonamiento siguiente «tiene sentido», ¿podría exponerse el motivo?

Si Juan es elegido, entonces José será nombrado presidente del comité.
Si Tomás es elegido, entonces José será nombrado presidente del comité.
O será elegido Juan o será elegido Tomás.
Por tanto, José será nombrado presidente del comité.

**C.** ¿Qué conclusiones se pueden sacar de los siguientes conjuntos de premisas utilizando las leyes del silogismo disyuntivo y simplificación disyuntiva?

1. O hay tres miembros del comité o hay cinco miembros.
   Si hay tres miembros, entonces no habrá empate de votos.
   Si hay cinco miembros, entonces no habrá empate de votos.
2. Si esta figura tiene tres lados, entonces es un triángulo.
   Si esta figura tiene tres ángulos, entonces es un triángulo.
   Esta figura cerrada o tiene tres lados o tiene tres ángulos.
3. O el equipo de los «Osos», o el equipo de los «Tigres» acabará primero.
   Si el equipo de los «Osos» acaba primero, entonces el equipo de los «Caballeros» será tercero.
   Si el equipo de los «Tigres» acaba primero el equipo de los «Caballeros» será tercero.

**D.** Dar una demostración formal de las siguientes conclusiones a partir de los conjuntos de premisas dados.

1. Demostrar: $\neg T \ \& \ S$
   (1) $P \rightarrow \neg Q$
   (2) $P \vee R$
   (3) $R \rightarrow \neg Q$
   (4) $T \rightarrow Q$
   (5) $S$

2. Demostrar: $Q$
   (1) $Q \vee S$
   (2) $S \rightarrow T$
   (3) $\neg T$

3. Demostrar: $\neg S \ \& \ R$
   (1) $S \rightarrow P$
   (2) $\neg P \ \& \ \neg T$
   (3) $\neg T \rightarrow R$

**E.** Simbolizar el razonamiento siguiente y después probar que la conclusión se puede deducir lógicamente de las premisas.

Juan o alcanza 65 puntos en el examen o alcanza 70 puntos.
Si Juan alcanza 65 puntos en el examen, entonces no obtiene la calificación de «Bien».
Si alcanza 70 puntos en el examen, no obtiene la calificación de «Bien».
Si Juan estudia, entonces obtiene la calificación de «Bien» en el examen.
Por tanto, Juan no estudia.

**F.** Dar una demostración formal de cada uno de los razonamientos siguientes:

1. Demostrar: $x<4$
   (1) $x=y \lor x>y$
   (2) $x<4 \lor x \nless z$
   (3) $x=y \rightarrow x<z$
   (4) $x>y \rightarrow x<z$

2. Demostrar: $x=1$
   (1) $2x+y=5 \rightarrow 2x=2$
   (2) $2x+y=5 \lor y=3$
   (3) $2x=2 \rightarrow x=1$
   (4) $y=3 \rightarrow 2x=2$

3. Demostrar: $x=2$
   (1) $x<3 \lor x>4$
   (2) $x<3 \rightarrow x \neq y$
   (3) $x>4 \rightarrow x \neq y$
   (4) $x<y \lor x \neq y$
   $\rightarrow x \neq 4 \ \& \ x=2$

4. Demostrar: $x^2=9$
   (1) $x=(+3) \rightarrow 2x^2=18$
   (2) $x=(+3) \lor x=(-3)$
   (3) $x=(-3) \rightarrow 2x^2=18$
   (4) $2x^2=18 \rightarrow x^2=9$

5. Demostrar: $\neg(x \neq 5)$
   (1) $z>x \rightarrow x \neq 7$
   (2) $x<6 \lor x=3$
   (3) $x=3 \rightarrow z>x$
   (4) $x<6 \rightarrow z>x$
   (5) $x=7 \lor x=5$

6. Demostrar: $y=z \lor x \neq 5$
   (1) $x=y \rightarrow x<z$
   (2) $x=5 \rightarrow x \nless z$
   (3) $x=3 \rightarrow x<z$
   (4) $x \nless y \rightarrow x=y$
   (5) $x=3 \lor x \nless y$

7. Demostrar: $x^2=9 \lor x^2>9$
   (1) $x=3 \lor x=4$
   (2) $x=3 \rightarrow x^2-7x+12=0$
   (3) $x=4 \rightarrow x^2-7x+12=0$
   (4) $x^2-7x+12=0 \rightarrow x>2$
   (5) $x^2<9 \rightarrow x \ngtr 2$
   (6) $x^2 \nless 9 \rightarrow x^2=9 \lor x^2>9$

8. Demostrar: $\cos\theta=\frac{1}{2}\sqrt{3} \lor \csc\theta=2$
   (1) $\theta=150° \rightarrow \operatorname{sen}\theta=\frac{1}{2}$
   (2) $\theta=30° \lor \theta=150°$
   (3) $\operatorname{sen}\theta=\frac{1}{2} \rightarrow \csc\theta=2$
   (4) $\theta=30° \rightarrow \operatorname{sen}\theta=\frac{1}{2}$

*Leyes conmutativas.* Estas reglas, probablemente, parecerán muy triviales; sin embargo, se han de enunciar, pues no se puede dar ningún paso como conocido, si no se tiene una regla explícita que lo permita. El razonamiento que sigue es un ejemplo del uso de una de las leyes conmutativas.

Galileo murió en 1642 e Isaac Newton nació en 1642.
Por tanto, Isaac Newton nació en 1642 y Galileo murió en 1642.

En forma simbólica:

De $\quad$ **P** & **Q**
se deduce **Q** & **P**.

Es muy obvia, pues se sabe que el orden de las proposiciones atómicas en una conjunción no afecta al significado de la proposición molecular. Sin duda, todo el mundo afirmaría que siempre que **P** & **Q** es cierta, **Q** & **P** es también cierta. Recuérdese que esto es precisamente lo que se exige para una buena regla de inferencia: siempre que las premisas sean ciertas la conclusión ha de ser cierta.

Otro tipo de proposición molecular a la que se aplica la ley conmutativa es la siguiente:

O $x$ es mayor que cinco o $x$ es igual a cinco.

¿Es válida la conclusión siguiente?

O $x$ es igual a cinco o $x$ es mayor que cinco.

La respuesta es «sí», puesto que efectivamente es cierta si la premisa lo es. Para ilustrar la forma de la ley conmutativa simbolizamos este razonamiento. Sea

**P** = «$x$ es mayor que cinco»
**Q** = «$x$ es igual a cinco».

El razonamiento es:

De $\quad$ **P** $\vee$ **Q**
se deduce **Q** $\vee$ **P**.

La ley conmutativa se aplica a conjunciones y disjunciones; es decir, el cambio del orden de los dos miembros de las conjunciones o de las disjunciones no altera su significado. La ley conmutativa no se aplica a las condicionales. A continuación se dan otros ejemplos:

*a.* (1) $P \& \neg Q$ P
(2) $\neg Q \& P$ CL 1

*b.* (1) $\neg P \& Q$ P
(2) $Q \& \neg P$ CL 1

*c.* (1) $\neg P \vee \neg Q$ P
(2) $\neg Q \vee \neg P$ CL 1

La abreviatura de esta regla es CL.

## EJERCICIO 15

**A.** Aplicar la ley conmutativa a las proposiciones siguientes para obtener una proposición diferente.

1. La adición es una operación binaria y la multiplicación es una operación binaria.
2. O una fuerza actúa sobre un cuerpo o la velocidad del cuerpo no varía.
3. O el tío de Juan es un senador o es un representante en la Legislatura del Estado.
4. Antonio vive en la calle del Mercado y Juan en la calle del Sol.
5. O el hidrógeno es un líquido o es un gas.

**B.** ¿Qué conclusión se puede sacar de las siguientes premisas utilizando la ley conmutativa?

1. (1) $\neg P \vee Q$ P
2. (1) $\neg R \& \neg S$ P
3. (1) $P \& S$ P
4. (1) $\neg T \vee \neg S$ P
5. (1) $Q \vee R$ P

**C.** Demostrar que las conclusiones siguientes son válidas dando una deducción formal completa.

1. Demostrar: $S \;\&\; Q$
   (1) $P \vee T$
   (2) $\neg T$
   (3) $P \rightarrow Q \;\&\; S$

2. Demostrar: $\neg(R \;\&\; \neg T)$
   (1) $(R \;\&\; \neg T) \rightarrow \neg S$
   (2) $P \rightarrow S$
   (3) $P \;\&\; Q$

3. Demostrar: $S \;\&\; R$
   (1) $(R \;\&\; S) \vee P$
   (2) $Q \rightarrow \neg P$
   (3) $T \rightarrow \neg P$
   (4) $Q \vee T$

4. Demostrar: $R \vee Q$
   (1) $S \rightarrow R$
   (2) $S \vee T$
   (3) $\neg T$

5. Demostrar: $T$
   (1) $P \rightarrow Q$
   (2) $Q \rightarrow R$
   (3) $(P \rightarrow R) \rightarrow \neg S$
   (4) $S \vee T$

6. Demostrar: $\neg S$
   (1) $\neg T \vee \neg S$
   (2) $\neg Q \rightarrow T$
   (3) $Q \rightarrow \neg R$
   (4) $R$

7. Demostrar: $R$
   (1) $S \rightarrow R \vee T$
   (2) $\neg\neg S$
   (3) $\neg T$

8. Demostrar: $\neg Q \;\&\; P$
   (1) $T \rightarrow P \;\&\; \neg Q$
   (2) $T \vee \neg R$
   (3) $R$

9. Demostrar: $T$
   (1) $P \vee \neg R$
   (2) $\neg S$
   (3) $P \rightarrow S$
   (4) $\neg R \rightarrow T$

10. Demostrar: $\neg P$
   (1) $R \rightarrow T$
   (2) $S \rightarrow Q$
   (3) $T \vee Q \rightarrow \neg P$
   (4) $R \vee S$

11. Demostrar: $y \nless 4 \;\;\&\;\; x < y$
   (1) $x > y \;\;\vee\;\; x < 4$
   (2) $x < 4 \;\;\rightarrow\;\; x < y \;\;\&\;\; y \nless 4$
   (3) $x > y \;\;\rightarrow\;\; x = 4$
   (4) $x \neq 4$

12. Demostrar: $y > 3 \;\;\&\;\; y < 5$
   (1) $x = 3 \;\;\vee\;\; y = 3$
   (2) $x > 2 \;\;\vee\;\; x + y \ngtr 5$
   (3) $y = 3 \;\;\vee\;\; x = 3 \;\;\rightarrow\;\; x + y > 5$
   (4) $\neg(y < 5 \;\;\&\;\; y > 3) \;\;\rightarrow\;\; x \ngtr 2$

13. Demostrar: $x<3 \quad \& \quad y=7$
    (1) $x<3 \quad \& \quad y>6$
    (2) $y\neq 7 \quad \rightarrow \quad \neg(x=2 \quad \& \quad y>x)$
    (3) $y>6 \quad \& \quad x<3 \quad \rightarrow \quad y>x \quad \& \quad x=2$

14. Demostrar: $x=1 \quad \& \quad (y<1 \quad \vee \quad y<2)$
    (1) $x+2y=5 \quad \vee \quad 3x+4y=11$
    (2) $x\nless 2 \quad \vee \quad x>y \quad \rightarrow \quad y<2 \quad \vee \quad y<1$
    (3) $3x+4y=11 \quad \rightarrow \quad x=1$
    (4) $x>y \quad \vee \quad x\nless 2$
    (5) $x+2y=5 \quad \rightarrow \quad x=1$

15. Demostrar: $x<6$
    (1) $x>y \quad \vee \quad x<6$
    (2) $x>y \quad \rightarrow \quad x>4$
    (3) $x>4 \quad \rightarrow \quad x=5 \quad \& \quad x<7$
    (4) $x<6 \quad \rightarrow \quad x=5 \quad \& \quad x<7$
    (5) $x<7 \quad \& \quad x=5 \quad \rightarrow \quad z>x \quad \vee \quad y<z$
    (6) $x>y \quad \rightarrow \quad \neg(y<z \quad \vee \quad z>x)$

*Las leyes de Morgan.* En el lenguaje corriente ocurre a veces que hay proposiciones enunciadas de manera distinta que tienen el mismo significado. Por ejemplo

(1) No llueve y no hace sol,

se puede también expresar, en forma algo forzada, diciendo:

(2) No ocurre que llueva o que haga sol.

Si (1) y (2) significan lo mismo en el lenguaje corriente, entonces en Lógica será válido concluir (1) de (2) o (2) de (1), lo que expresado en símbolos es:

*(a)* de $\neg P \;\&\; \neg Q$ se puede concluir $\neg(P \vee Q)$ .

y

*(b)* de $\neg(P \vee Q)$ se puede concluir $\neg P \;\&\; \neg Q$.

Así *(b)* dice que si no se tiene o P o Q, entonces no se tiene P y no se tiene Q. La regla que permite esta conclusión es una de las denominadas *leyes de Morgan.*

Las premisas de *(a)* y *(b)* son dos de las formas proposicionales moleculares a las que se les puede aplicar las leyes de Morgan. Estas leyes también se aplican a otras formas proposicionales, como se puede ver al considerar las dos proposiciones equivalentes:

(3) O no hace calor o no nieva

y

(4) No hace a la vez calor y nieva,

y en forma más lógica,

(4') No ocurre a la vez que hace calor y
que nieva.

Puesto que (3) y (4) tienen el mismo significado, una puede deducirse de la otra. Por tanto, en símbolos lógicos se puede escribir:

*(c)* de $\neg P \vee \neg Q$ se puede concluir $\neg(P \ \& \ Q)$,
*(d)* de $\neg(P \ \& \ Q)$ se puede concluir $\neg P \vee \neg Q$.

*(c)* y *(d)* son, pues, otros dos ejemplos de la aplicación de las leyes de Morgan. Otro caso es:

*(e)* de $P \ \& \ Q$ se puede concluir $\neg(\neg P \vee \neg Q)$.

y finalmente:

*(f)* de $\neg(P \vee \neg Q)$ se puede concluir $\neg P \ \& \ \neg\neg Q$ .

Con frecuencia hay más de una forma posible para la conclusión. Afortunadamente, estudiando las diferentes formas proposicionales a las que se aplican las leyes de Morgan se obtiene un modelo que se puede seguir siempre. Será posible entonces enunciar las leyes de Morgan como una regla que se aplicará a cada una de las formas de premisas en las que puede utilizarse, y en todo caso se obtiene la forma de la conclusión deseada. Para hallar este modelo examinaremos cuidadosamente las seis formas proposicionales dadas.

*a.* $\neg P \ \& \ \neg Q$
$\quad\ \neg(P \vee Q)$

*b.* $\neg(P \vee Q)$
$\quad\ \neg P \ \& \ \neg Q$

*c.* $\neg P \vee \neg Q$
$\quad\ \neg(P \ \& \ Q)$

*d.* $\neg(P \ \& \ Q)$
$\quad\ \neg P \vee \neg Q$

*e.* $P \ \& \ Q$
$\quad\ \neg(\neg P \vee \neg Q)$

*f.* $\neg(P \vee \neg Q)$
$\quad\ \neg P \ \& \ Q$

*Primero,* obsérvese que la premisa es siempre de una de las tres formas siguientes: (1) una conjunción como en *(a)* y *(e)*; (2) una disjunción como en *(c)*; o (3) una negación como en *(b)*, *(d)* y *(f)*. Si es una negación, ha de ser la negación de una conjunción como en *(d)* o la negación de una disjunción como en *(b)* y *(f)*. La premisa no es nunca una condicional, ni la negación de una condicional, ni la negación de una negación.

*Segundo,* obsérvese que si la premisa es una negación, la conclusión no es una negación como en *(b)*, *(d)* y *(f)*. Y si la premisa no es una negación, entonces la conclusión es una negación como en *(a)*, *(c)* y *(e)*. Una fórmula completa se niega, o bien añadiendo un símbolo de negación delante de la fórmula, o bien quitando el símbolo de negación delante de la fórmula.

*Tercero,* obsérvese que & se cambia siempre en ∨ y ∨ en &.

*Cuarto,* obsérvese que cada miembro de una conjunción o disjunción siempre gana o pierde un símbolo de negación. Así, al aplicar las leyes de Morgan cada miembro se niega.

Resumiendo, lo que se ha de hacer para aplicar las leyes de Morgan, cuya abreviatura es DL, *como una regla de operación,* es verificar los siguientes pasos:

1. Cambiar & en ∨ o ∨ en &;
2. Negar cada miembro de la disjunción o conjunción;
3. Negar la fórmula completa.

En el ejemplo que sigue estos tres pasos se dan cada vez que se han aplicado las leyes de Morgan; pero haciendo diferentes elecciones de la manera de hacer cada una de las tres negaciones, se han obtenido conclusiones en distinta forma. Obsérvese que se puede elegir la manera de negar $\neg(\neg P \ \& \ Q)$ o de negar $\neg P$, pero no hay elección en la manera de negar $Q$.

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $\neg(\neg P \ \& \ Q)$ | P |
| (2) | $P \vee \neg Q$ | DL 1 |
| (3) | $\neg\neg P \vee \neg Q$ | DL 1 |
| (4) | $\neg\neg(P \vee \neg Q)$ | DL 1 |
| (5) | $\neg\neg(\neg\neg P \vee \neg Q)$ | DL 1 |

Algunos otros ejemplos de la aplicación de las leyes de Morgan son

*a.* $\neg(P \ \& \ \neg Q)$
$\neg P \vee \neg\neg Q$

*c.* $\neg\neg P \vee \neg Q$
$\neg(\neg P \ \& \ Q)$

*b.* $\neg(\neg P \ \& \ \neg Q)$
$\neg\neg P \vee \neg\neg Q$

*d.* $\neg(P \vee \neg Q)$
$\neg P \ \& \ \neg\neg Q$

*e.* $\neg\neg P \ \& \ \neg Q$
$\neg(\neg P \vee Q)$

## Ejercicio 16

**A.** ¿Qué se puede concluir de las premisas siguientes utilizando las leyes de Morgan?

1. O los arácnidos no son insectos o no tienen ocho patas.
2. No ocurre que o el aire es un buen conductor del calor o el agua es un buen conductor del calor.
3. No ocurre que un número es a la vez mayor que cero y que es negativo.
4. El río Mississipi no corre en dirección Norte y el río Nilo no corre en dirección Sur.
5. No ocurre que los murciélagos son pájaros o que las focas son peces.

**B.** Traducir las premisas y conclusiones de la Sección **A** anterior en símbolos lógicos y demostrar que su conclusión es consecuencia lógica de las premisas.

**C.** Aplicar las leyes de Morgan a las siguientes proposiciones para deducir conclusiones.

| | | |
|---|---|---|
| 1. $\neg(P \,\&\, Q)$ | 5. $\neg\neg S \vee \neg T$ | 9. $\neg(\neg P \,\&\, \neg Q)$ |
| 2. $\neg R \vee \neg T$ | 6. $\neg P \,\&\, \neg Q$ | 10. $\neg S \vee \neg\neg T$ |
| 3. $\neg(\neg R \,\&\, S)$ | 7. $\neg\neg P \,\&\, \neg Q$ | 11. $R \,\&\, S$ |
| 4. $\neg G \vee \neg H$ | 8. $\neg(C \vee D)$ | 12. $\neg(\neg A \,\&\, \neg B)$ |

**D.** Indicar una demostración formal completa para cada uno de los razonamientos simbolizados siguientes.

1. Demostrar: $\neg S$
   (1) $\neg(P \,\&\, Q)$
   (2) $\neg Q \rightarrow T$
   (3) $\neg P \rightarrow T$
   (4) $S \rightarrow \neg T$

2. Demostrar: $\neg(A \vee B)$
   (1) $C \,\&\, \neg D$
   (2) $C \rightarrow \neg A$
   (3) $D \vee \neg B$

3. Demostrar: $R \,\&\, Q$
   (1) $\neg S \rightarrow \neg(P \vee$ -
   (2) $T \rightarrow Q \,\&\, R$
   (3) $\neg S$

Demostrar: $\neg R$
(1) $P \rightarrow \neg Q$
(2) $\neg Q \rightarrow \neg S$
(3) $(P \rightarrow \neg S) \rightarrow \neg T$
(4) $R \rightarrow T$

5. Demostrar: $\mathsf{D}$
   (1) $\neg\mathsf{A} \rightarrow \mathsf{B}$
   (2) $\mathsf{C} \rightarrow \mathsf{B}$
   (3) $\mathsf{C} \lor \neg\mathsf{A}$
   (4) $\neg\mathsf{B} \lor \mathsf{D}$

6. Demostrar: $\neg\mathsf{T}$
   (1) $\mathsf{T} \rightarrow \mathsf{P} \;\&\; \mathsf{S}$
   (2) $\mathsf{Q} \rightarrow \neg\mathsf{P}$
   (3) $\mathsf{R} \rightarrow \neg\mathsf{S}$
   (4) $\mathsf{R} \lor \mathsf{Q}$

7. Demostrar: $\neg\mathsf{P}$
   (1) $\mathsf{R} \rightarrow \neg\mathsf{P}$
   (2) $(\mathsf{R} \;\&\; \mathsf{S}) \lor \mathsf{T}$
   (3) $\mathsf{T} \rightarrow (\mathsf{Q} \lor \mathsf{U})$
   (4) $\neg\mathsf{Q} \;\&\; \neg\mathsf{U}$

8. Demostrar: $\mathsf{R} \;\&\; \mathsf{Q}$
   (1) $\mathsf{P} \lor \mathsf{Q}$
   (2) $\mathsf{S} \rightarrow \mathsf{Q} \;\&\; \mathsf{R}$
   (3) $\mathsf{P} \rightarrow \mathsf{S}$
   (4) $\mathsf{Q} \rightarrow \mathsf{S}$

9. Demostrar: $\mathsf{G} \lor \neg\mathsf{H}$
   (1) $\mathsf{E} \lor \mathsf{F} \rightarrow \neg\mathsf{H}$
   (2) $\mathsf{J} \rightarrow \mathsf{E}$
   (3) $\mathsf{K} \rightarrow \mathsf{F}$
   (4) $\mathsf{J} \lor \mathsf{K}$

10. Demostrar: $\mathsf{S} \;\&\; \mathsf{T}$
   (1) $\neg(\mathsf{P} \lor \neg\mathsf{R})$
   (2) $\mathsf{Q} \lor \mathsf{P}$
   (3) $\mathsf{R} \rightarrow \mathsf{S}$
   (4) $(\mathsf{Q} \;\&\; \mathsf{S}) \rightarrow (\mathsf{T} \;\&\; \mathsf{S})$

**E.** Dar una demostración formal completa para cada uno de los razonamientos siguientes.

1. Demostrar: $\neg(x=3 \;\&\; x<2)$
   (1) $\neg(x<2 \;\&\; x=3)$

2. Demostrar: $\neg(x=5 \;\&\; y=4)$
   (1) $y \neq 3$
   (2) $x+y=8 \rightarrow y=3$
   (3) $x+y=8 \lor x \neq 5$

3. Demostrar: $y=2 \;\&\; x>y$
   (1) $\neg(y>5 \;\&\; x \neq 6)$
   (2) $x=6 \rightarrow x>y$
   (3) $y \ngtr 5 \rightarrow x>y$

4. Demostrar: $x>y$
   (1) $x \nless y$
   (2) $x<y \lor \neg(x \ngtr 3 \lor x+y<5)$
   (3) $x>3 \rightarrow \neg(x \ngtr y \lor y \neq 2)$

5. Demostrar: $\neg(x=2 \quad \vee \quad y<5)$
   (1) $\neg(y-x=2 \quad \vee \quad x+y \ngtr 8)$
   (2) $\neg(x>y \quad \vee \quad y<5)$
   (3) $x=2 \quad \rightarrow \quad x+y \ngtr 8$
6. Demostrar: $x<y \quad \vee \quad y \neq 4$
   (1) $x=1 \quad \rightarrow \quad x<y$
   (2) $x^2-4x+3=0 \quad \rightarrow \quad x=1 \quad \vee \quad x=3$
   (3) $\neg(x=y \quad \vee \quad x^2-4x+3 \neq 0)$
   (4) $x=3 \quad \rightarrow \quad x<y$
7. Demostrar: $2+3 \neq 3 \times 3 \quad \vee \quad 2 \times 3 \neq 1 \times 4$
   (1) $2 \times 3 = 1 \times 4 \quad \& \quad 2+3=3 \times 3 \quad \rightarrow \quad 2+3=6$
   (2) $2+3 \neq 6 \quad \vee \quad 2 \times 3 = 5$
   (3) $2 \times 3 \neq 5$
8. Demostrar: $x-y \neq 2$
   (1) $\neg(x>y \quad \& \quad x+y>7)$
   (2) $x \ngtr y \quad \rightarrow \quad x<4$
   (3) $x+y \ngtr 7 \quad \rightarrow \quad x<4$
   (4) $x-y=2 \quad \rightarrow \quad x \nless 4$
9. Demostrar: $x=1$
   (1) $\neg(z<3 \quad \vee \quad x>y) \quad \& \quad y=2$
   (2) $x \nless y \quad \vee \quad x=1$
   (3) $x>z \quad \rightarrow \quad x>y$
   (4) $x \ngtr z \quad \rightarrow \quad x<y$
10. Demostrar: $\neg(x=y \quad \vee \quad y \ngtr 1)$
   (1) $y \neq 1 \quad \& \quad y \nless 1$
   (2) $y \ngtr 1 \quad \rightarrow \quad y<1 \quad \vee \quad y=1$
   (3) $x=3 \quad \vee \quad x>3$
   (4) $x>3 \quad \rightarrow \quad x \neq y$
   (5) $x=3 \quad \rightarrow \quad x \neq y$

## • 2.6 *Proposiciones bicondicionales*

Hasta aquí se han analizado proposiciones moleculares utilizando sólo cuatro términos de enlace de proposiciones. Hay otro término de enlace de proposiciones que se utilizará más tarde. Este término de enlace es «si y sólo si». Las proposiciones que utilizan este término de enlace se denominan ***proposiciones bicondicionales***. El símbolo que se utilizará para este término de enlace es:

Este símbolo es muy significativo para la proposición bicondicional. El signo aparece como dos signos condicionales que van en sentido opuesto. Efectivamente, una proposición bicondicional se parece extraordinariamente a dos proposiciones condicionales. Para ilustrar esto se considera un ejemplo en el lenguaje habitual:

Estos campos se inundan si y sólo si el agua alcanza esta altura.

En forma simbólica la proposición sería:

$$P \leftrightarrow Q,$$

donde $P$ es el símbolo de la primera proposición y $Q$ es el símbolo de la última proposición. Se puede leer esta proposición: $P$ si y sólo si $Q$.

La proposición bicondicional $P \leftrightarrow Q$ tiene la misma fuerza que dos proposiciones condicionales; primera $P \rightarrow Q$ y segunda, $Q \rightarrow P$. La proposición en castellano significa que si el agua alcanza cierta altura, entonces el campo se inunda. También significa que si el campo se inunda, entonces el agua alcanza cierta altura.

Así se tiene una nueva regla que nos permite deducir ambas $P \rightarrow Q$ y $Q \rightarrow P$ de $P \leftrightarrow Q$. Esta ley se denominará la *ley de las proposiciones bicondicionales,* LB. En símbolos permite los siguientes razonamientos.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *a.* | $P \leftrightarrow Q$ | P | *c.* | $P \leftrightarrow Q$ | P |
| | $P \rightarrow Q$ | LB | | $(P \rightarrow Q)\ \&\ (Q \rightarrow P)$ | LB |
| *b.* | $P \leftrightarrow Q$ | P | *d.* | $P \rightarrow Q$ | P |
| | $Q \rightarrow P$ | LB | | $Q \rightarrow P$ | P |
| | | | | $P \leftrightarrow Q$ | LB |

Se adoptará la regla de que la bicondicional «si y sólo si» es más potente que cada uno de los otros términos de enlace. Así, sin paréntesis, se sabe que:

$$P \rightarrow Q \leftrightarrow S\ \&\ P$$

es una bicondicional y nunca una condicional o conjunción. Para convertirla en condicional, son necesarios paréntesis, como se indica en

$$P \rightarrow (Q \leftrightarrow S\ \&\ P).$$

El consecuente de esta condicional es una bicondicional. Si se quiere que el consecuente sea una conjunción, hacen falta paréntesis adicionales como en

$$P \rightarrow ((Q \leftrightarrow S)\ \&\ P).$$

Puesto que $\leftrightarrow$ domina los otros términos de enlace, mientras los paréntesis no indiquen lo contrario, las fórmulas siguientes son también bicondicionales:

*a.* $\neg P \leftrightarrow \neg Q$ *b.* $P \ \& \ Q \leftrightarrow S$ *c.* $S \vee T \leftrightarrow \neg P$
$R \ \& \ S \leftrightarrow P \ \& \ Q$ $P \vee Q \leftrightarrow R \vee S$ $\neg T \leftrightarrow S$

## Ejercicio 17

**A.** Nombrar cada uno de los términos de enlace que se encuentran en las proposiciones siguientes:

1. Este metal se funde si y sólo si se somete a un calor muy intenso.
2. Patinaremos si y sólo si el hielo no es demasiado delgado.
3. Tomás irá andando si y sólo si ha perdido el coche.
4. El sonido se propaga si y sólo si hay un medio transmisor.
5. Esta figura tiene cuatro ángulos interiores si y sólo si tiene cuatro lados.

**B.** Simbolizar completamente las proposiciones de la Sección **A** anterior, indicando las proposiciones atómicas que son simbolizadas por cada símbolo literal.

**C.** Simbolizar completamente las premisas y conclusiones de cada uno de los razonamientos siguientes y dar una deducción formal:

1. Esta ley será aprobada en esta sesión si y sólo si es apoyada por la mayoría. O es apoyada por la mayoría o el gobernador se opone a ella. Si el gobernador se opone a ella, entonces será pospuesta en las deliberaciones del comité. Por tanto, o esta ley será aprobada en esta sesión o será pospuesta en las deliberaciones del comité.
2. El Sol sale y se pone si y sólo si la Tierra gira. La Tierra gira y la Luna se mueve alrededor de la Tierra. Por tanto, el Sol sale y se pone o el clima es muy caliente o frío.
3. $3 \times 5 = 12 \quad \leftrightarrow \quad 5+5+5=12$
   $4 \times 4 \neq 13$
   $5+5+5=12 \quad \rightarrow \quad 4 \times 4 = 13$
   Por tanto, $3 \times 5 \neq 12$
4. El terreno puede ser cultivado si y sólo si se provee de un sistema de riego. Si el terreno puede ser cultivado, entonces triplicará su valor actual.

Por tanto, si se provee de un sistema de riego, entonces el terreno triplicará su valor actual.

5. Un líquido es un ácido si y sólo si colorea de azul el papel de tornasol rojo. Un líquido colorea de azul el papel de tornasol rojo si y sólo si contiene iones de hidrógeno libres.
   Por tanto, un líquido es un ácido si y sólo si contiene iones de hidró geno libres.
6. Si no ocurre que si un objeto flota en el agua entonces es menos denso que el agua, entonces se puede caminar sobre el agua. Pero no se puede caminar sobre el agua.
   Si un objeto es menos denso que el agua, entonces puede desplazar una cantidad de agua igual a su propio peso.
   Si puede desplazar una cantidad de agua igual a su propio peso, entonces el objeto flotará en el agua.
   Por tanto, un objeto flotará en el agua si y sólo si es menos denso que el agua.

**D.** Dar una demostración formal completa de cada uno de los razonamientos siguientes.

1. Demostrar: $2 \times 5 = 5 + 5 \;\rightarrow\; 2 \times 4 = 4 + 4$
   (1) $2 \times 4 = 4 + 4 \;\leftrightarrow\; 2 \times 5 = 5 + 5$

2. Demostrar: $x = 4 \;\leftrightarrow\; 3x + 2 = 14$
   (1) $3x + 2 = 14 \;\leftrightarrow\; 3x = 12$
   (2) $3x = 12 \;\leftrightarrow\; x = 4$

3. Demostrar: $x + y = 5$
   (1) $3x + y = 11 \;\leftrightarrow\; 3x = 9$
   (2) $3x = 9 \;\rightarrow\; 3x + y = 11 \;\leftrightarrow\; y = 2$
   (3) $y \neq 2 \;\vee\; x + y = 5$

4. Demostrar: $\neg(2x \neq 8 \;\&\; x \neq 3)$
   (1) $2x = 6 \;\leftrightarrow\; x = 3$
   (2) $2x = 8 \;\leftrightarrow\; x = 4$
   (3) $2x = 6 \;\vee\; x = 4$

5. Demostrar: $\neg(y = 2 \;\&\; x + 2y \neq 7)$
   (1) $5x - 15 \;\leftrightarrow\; x = 3$
   (2) $5x = 15 \;\&\; 4x - 12$
   (3) $x = 3 \;\rightarrow\; x + 2y = 7$

6. Demostrar: $x \nless y \quad \& \quad x \neq y$
   (1) $y \ngtr x \quad \leftrightarrow \quad x=y \quad \vee \quad x<y$
   (2) $\neg(y<1 \quad \vee \quad y \ngtr x)$
7. Demostrar: $x<y \quad \leftrightarrow \quad y>x$
   (1) $y>x \quad \leftrightarrow \quad x<y$

8. Demostrar: $x<y \quad \& \quad y=6$
   (1) $x<y \quad \leftrightarrow \quad y>4$
   (2) $y=6 \quad \leftrightarrow \quad x+y=10$
   (3) $y>4 \quad \& \quad \neg(x+y \neq 10)$

9. Demostrar: $xy \neq 0$
   (1) $y>x \quad \leftrightarrow \quad x=0$
   (2) $xy=0 \quad \leftrightarrow \quad x=0$
   (3) $y \ngtr x$

10. Demostrar: $\neg(x<y \quad \& \quad x=1)$
    (1) $x=y \quad \rightarrow \quad x \nless y$
    (2) $y=0 \quad \leftrightarrow \quad x \nless y$
    (3) $x=0 \quad \vee \quad xy=0 \quad \rightarrow \quad y=0$
    (4) $(x=y \quad \rightarrow \quad y=0) \quad \rightarrow \quad x=0$

## • 2.7 *Resumen de reglas de inferencia*

Se ha visto que uno de los objetivos importantes de la Lógica es la inferencia o deducción de conclusiones de conjuntos de premisas. Para hacer deducciones son necesarias ciertas reglas de inferencia. Estas reglas operan igual que las reglas de cualquier juego. Permiten hacer ciertos movimientos. Cada movimiento permitido por las reglas es un paso en inferencia; una proposición se puede deducir si se han dado otras proposiciones. Hasta aquí, en nuestro estudio de la Lógica, se han aprendido catorce reglas de inferencia, las suficientes para poder hacer deducciones largas y bastante complicadas. En las demostraciones formales o deducciones se justifica cada paso de inferencia haciendo referencia a la regla particular de inferencia que permite aquel paso. Se indica esta regla poniendo la abreviatura de su nombre a la derecha del paso de inferencia. Es también necesario indicar los números de las líneas en la inferencia de las que se ha deducido cada paso.

Las reglas de Lógica no son, evidentemente, reglas elegidas al azar. Son de tal forma que sólo permiten hacer inferencias válidas. Una inferencia válida es la que es consecuencia lógica de las premisas. Esto significa que si las premisas son ciertas, la conclusión que se sigue ha de ser también cierta. La peculiaridad de las reglas de inferencia es el asegurar que si se ha dado un conjunto de proposiciones verdaderas las conclusiones que se pueden deducir de estas proposiciones serán también verdaderas.

Para proseguir en el estudio de la Lógica es esencial estar muy familiarizado no sólo con la idea misma de inferencia válida, sino también con cada regla particular de inferencia que permite realizar un paso lógico. Si no se conocen bien estas reglas lógicas no se es capaz de planear una estrategia que ayudará a alcanzar la conclusión deseada.

Al final de esta sección se da una tabla con el nombre de cada regla y la forma de la misma. Se puede utilizar como tabla de referencia. Recuérdese que la forma de la inferencia es la misma tanto si las partes de la proposición molecular son proposiciones atómicas simplemente o son a su vez proposiciones moleculares.

En la tabla se ha evitado recargarla dándole forma de una demostración formal y se ha empleado simplemente una línea horizontal. Debajo de la línea se ha escrito la proposición que resulta de aplicar la regla a la proposición o proposiciones anteriores a la línea. En una demostración, las proposiciones anteriores a la línea pueden ser premisas u otras líneas deducidas anteriormente.

*Tabla de re de inferencia*

*Modus ponendo ponens* (PP)

$$\begin{array}{l} P \rightarrow Q \\ P \\ \hline Q \end{array}$$

*Modus tollendo tollens* (TT)

$$\begin{array}{l} P \rightarrow Q \\ \neg Q \\ \hline \neg P \end{array}$$

*Modus tollendo ponens* (TP)

$$\begin{array}{l} P \vee Q \\ \neg P \\ \hline Q \end{array} \qquad \begin{array}{l} P \vee Q \\ \neg Q \\ \hline P \end{array}$$

Doble negación (DN)

$$\begin{array}{l} P \\ \hline \neg\neg P \end{array} \qquad \begin{array}{l} \neg\neg P \\ \hline P \end{array}$$

Regla de simplificación (S)

$$\begin{array}{l} P \,\&\, Q \\ \hline P \end{array} \qquad \begin{array}{l} P \,\&\, Q \\ \hline Q \end{array}$$

Regla de adjunción (A)

$$\begin{array}{l} P \\ Q \\ \hline P \,\&\, Q \end{array} \qquad \begin{array}{l} P \\ Q \\ \hline Q \,\&\, P \end{array}$$

Ley del silogismo hipotético (HS)

$$\frac{P \rightarrow Q \quad Q \rightarrow R}{P \rightarrow R}$$

Ley de adición (LA)

$$\frac{P}{P \vee Q} \qquad \frac{Q}{P \vee Q}$$

Leyes de Morgan (DL)

1. Cambiar & por $\vee$ o $\vee$ por &
2. Negar cada miembro de la conjunción o disyunción.
3. Negar la fórmula completa.

Ley de la simplificación disyuntiva (DP)

$$\frac{P \vee P}{P}$$

Ley del silogismo disyuntivo (DS)

$$\frac{P \vee Q \quad P \rightarrow R \quad Q \rightarrow S}{R \vee S} \quad \text{o} \quad \frac{P \vee Q \quad P \rightarrow R \quad Q \rightarrow S}{S \vee R}$$

Leyes conmutativas

$$\frac{P \,\&\, Q}{Q \,\&\, P} \qquad \frac{P \vee Q}{Q \vee P}$$

Ley de las proposiciones bicondicionales (LB)

$$\frac{P \leftrightarrow Q}{P \rightarrow Q} \qquad \frac{P \leftrightarrow Q}{Q \rightarrow P}$$

$$\frac{P \rightarrow Q \quad Q \rightarrow P}{P \leftrightarrow Q} \qquad \frac{P \leftrightarrow Q}{(P \rightarrow Q) \,\&\, (Q \rightarrow P)}$$

Regla de premisas (P)

Una premisa se puede introducir en cualquier punto de la deducción.