Tarea 3 de Análisis Vectorial

Fecha de entrega 17 de febrero 2015

1)Determine si los siguientes campos vectoriales son gradientes, si lo son encontrar la función potencial.

a) $\vec{f}(x,y) = (sin\ y - ysin\ x + x)\hat{\imath} + (cos\ x + xcos\ y + y)\hat{\jmath}$

b) $\vec{f}(x,y,z) = (x+z)\hat{\imath} - (y+z)\hat{\jmath} + (x-y)\hat{k}$

c) $\vec{f}(x,y,z) = (2x^2 + 8xy^2)\hat{\imath} + (3x^3y - 3xy)\hat{\jmath} - (4y^2z^2 + 2x^3z)\hat{k}$

d) $\vec{f}(x,y,z) = (y^2cos\ x + z^3)\hat{\imath} - (4 - 2y\ sin\ x)\hat{\jmath} + (3xz^2 + 2)\hat{k}$

e) $\vec{f}(x,y,z) = (4xy - 3x^2z^2 + 1)\hat{\imath} + 2(x^2+1)\hat{\jmath} - (2x^3z + 3z^2)\hat{k}$

2) Sea $\vec{f}(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}\hat{\imath} + \frac{x}{x^2+y^2}\hat{\jmath}$ definida en $S = \{(x,y)|(x,y) \neq (0,0)\}$

a) Comprobar que para todo punto (x,y) de S tenemos $D_1f_2(x,y) = D_2f_1(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

b) Mostrar que $\vec{f}$ es un gradiente en $T = R^2 - \{(x,y)|y=0, x \leq 0\}$, que consta de todo el plano excepto los del eje x no positivo.

Primero expresar x e y en coordenadas polares, y demostrar que θ viene dado por las formulas

$\theta = arctan\frac{y}{x} \quad si \;\; x > 0$

$\theta = \frac{\pi}{2} \quad si \;\; x = 0$

$\theta = arctan\frac{y}{x} + \pi \quad si \;\; x < 0$

Finalmente deducir que

$\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}$ y $\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$ para todo (x,y) que pertenece a T. Esto demuestra que θ es la función potencial para $\vec{f}$.

3) Sea S el conjunto de los puntos $\vec{x} \neq 0$ de R^n. Pongamos $r = ||\vec{x}||$ y sea $\vec{f}$ el campo vectorial definido en S por $\vec{f}(\vec{x}) = r^p\vec{x}$, donde p es una constante real, hallar la función potencial para todo p.

4) Si Φ y Ψ son funciones potenciales para un campo vectorial continuo $\vec{f}$ en un conjunto conexo abierto S de R^n, demostrar que $\Phi - \Psi$ es constante en S.

5) Un fluido se desplaza en el plano xy de modo que cada partícula se mueve en línea recta desde el origen. Si una partícula está a la distancia r del origen su velocidad es ar^n, en donde a y n son constantes.

a) Determinar los valores de a y n para los cuales el campo vectorial de velocidad es el gradiente de un campo escalar.

b) Encontrar una función potencial de la velocidad siempre que esta sea un gradiente.